

MATHEMATIQUES

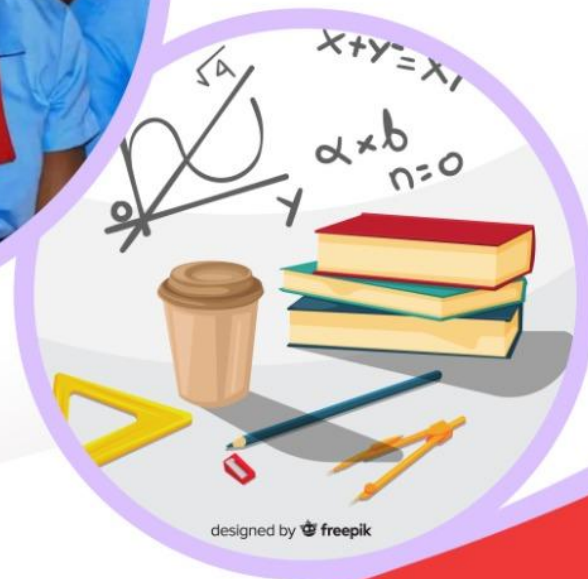
PROGRAMMES

DU SECONDAIRE



Gouvernement de la
République d'Haiti

Ministère de l'Éducation
Nationale et de la
Formation Professionnelle



designed by freepik

Année 4 : série « Mathématiques et physique »

UA Nombres et calculs			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Divisibilité dans \mathbb{Z}, division euclidienne		
	Extension à \mathbb{Z} des notions de multiple et de diviseur.	<p>Utiliser le calcul littéral pour traduire qu'un entier relatif a est un multiple d'un entier relatif b non nul et démontrer les propriétés de stabilité :</p> <ul style="list-style-type: none"> - si a divise b et c, alors a divise tout nombre de la forme $au + bv$, où u et v sont des entiers relatifs ; - si a divise b et si b divise c, alors a divise c. - etc. <p>Déterminer et utiliser la liste des diviseurs d'un nombre entier.</p>	<p>Exemple d'exercice possible :</p> <p>Déterminer tous les couples d'entiers naturels (m,n) tels que $m^2 - 2mn = 15$.</p> <p>Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $n - 3$ divise $n + 5$.</p> <p>Écrire un algorithme permettant de déterminer la liste des diviseurs positifs d'un entier naturel. Coder cet algorithme en Python.</p>
	Division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel non nul b .	Interpréter graphiquement la division euclidienne en représentant sur une demi-droite graduée les deux multiples consécutifs de b encadrant a et le reste r .	Extension à la division euclidienne d'un entier négatif par un entier naturel non nul.

		Démontrer l'existence et l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne.	Exemple d'exercices possibles : Déterminer tous les entiers naturels dont, dans division euclidienne par 4, le quotient est égal au reste.
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Les notions de multiple et de diviseur dans l'ensemble des entiers naturels sont déjà connues des élèves. Il s'agit ici de les étendre à l'ensemble des entiers relatifs, dont la structure d'anneau en fait le cadre d'étude privilégié. Cependant, il est inutile de s'étendre sur la division euclidienne d'un entier négatif a par un un entier naturel b non nul. Si les élèves sont confrontés à ce type de situation, ils se ramènent au cas habituel en posant $a' = -a$.</p>			
BLOC 2	Congruences dans \mathbb{Z}		
	<p>Relation de congruence modulo un entier naturel non nul ; notation.</p> <p>Lien avec la notion de multiple :</p> <p>$a \equiv b (n)$ si et seulement si $a - b$ est un multiple de n.</p> <p>La congruence est une relation d'équivalence</p> <p>compatibilité avec les opérations (addition, multiplication).</p> <p>En corollaire, compatibilité avec les puissances.</p>	<p>Utiliser une disjonction de cas pour dresser un tableau de congruences.</p> <p>Utiliser les congruences pour démontrer les critères de divisibilité par 3 et 9 et pour déterminer un critère de divisibilité par 11.</p> <p>Résoudre des congruences.</p>	<p>Exemples d'exercices possibles :</p> <p>Déterminer, selon les valeurs de n, les valeurs possibles pour le reste de dans la division euclidienne de 7^n par 10.</p> <p>En déduire le chiffre des unités de 7^{98}.</p> <p>Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de $4n$ par 9.</p> <p>Résoudre la congruence : $4n \equiv 5 (9)$.</p>

	<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Toute introduction de l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exclue.</p> <p>Des questions relatives aux congruences, apparemment gratuites, ont donné lieu à des applications contemporaines spectaculaires en cryptographie ou en codage.</p>		
BLOC 3	Diviseurs communs, PGCD		
	<p>Diviseurs communs à deux entiers naturels non nuls a et b.</p> <p>Plus grand diviseur commun.</p> <p>L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.</p> <p>Algorithme d'Euclide.</p> <p>Nombres premiers entre eux.</p>	<p>Démontrer que l'ensemble des diviseurs communs à a et b est aussi l'ensemble des diviseurs communs à b et au reste r de la division euclidienne de a par b.</p> <p>Écrire l'algorithme d'Euclide et démontrer qu'il « termine ».</p>	<p>Exemples d'exercices possibles :</p> <p>1. Déterminer le PGCD de 1551 et 132.</p> <p>2. Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. On pose $a = 5n + 7$ et $b = n + 1$. Déterminer le PGCD de a et b en discutant selon les valeurs de n.</p>
	<p>Identité de Bézout :</p> <p>Si d est le PGCD de a et b, alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que $d = au + bv$ (démonstration admise)</p>	<p>Sur un exemple numérique, « remonter » l'algorithme d'Euclide pour déterminer un couple (u, v) solution. Faire figurer dans un tableau les différentes étapes de l'algorithme.</p>	<p>Démontrer l'identité de Bézout en considérant le plus petit entier naturel de la forme $au + bv$.</p> <p>Écrire un algorithme permettant de déterminer un couple (u, v) solution et coder cet algorithme en Python.</p>
	Caractérisation des nombres premiers	Utiliser le théorème de Bézout pour démontrer que, si a est un entier relatif	Déterminer un entier relatif

	entre eux par le théorème de Bézout : Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.	donné, la congruence $a \times x \equiv 1(n)$ a des solutions si et seulement si a et n sont premiers entre eux.	x vérifiant $17x \equiv 1(26)$
	Le théorème de Gauss : Pour trois entiers relatifs a, b, c non nuls : Si a divise bc et si a est premier avec b , alors a divise c .	Démontrer le théorème de Gauss. Utiliser les théorèmes de Bézout et de Gauss pour résoudre des équations diophantiennes.	Déterminer un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $4u - 3v = 1$ et en déduire un couple (x_0, y_0) solution de l'équation (E) : $4x - 3y = 5$. Déterminer l'ensemble des couples solutions de (E).
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Il importe d'attirer l'attention des élèves sur deux points délicats :</p> <ul style="list-style-type: none"> - dans l'identité de Bézout, le couple (u, v) n'est pas unique ; - lorsque $d \neq 1$, l'existence des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$ ne suffit pas pour affirmer que d est le PGCD de a et b. <p>Il serait intéressant de présenter aux élèves des applications de la divisibilité et des congruences à des problèmes concrets de codes correcteurs d'erreurs (code de Hamming) ou de chiffrement (chiffrement de Vigenère, chiffrement de Hill, chiffrement RSA).</p>			
BLOC 4	Nombres premiers		
	Définition. L'ensemble des nombre premiers est infini.	Démontrer que si un entier $n \geq 4$ n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur premier p vérifiant $2 \leq p \leq \sqrt{n}$.	Nombres de Mersenne (de la forme $2^n - 1$). Nombres de Fermat (de la forme $2^{2^n} + 1$).

	Crible d'Eratosthène.	Utiliser le crible d'Eratosthène pour dresser la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.	Énoncer et démontrer le petit théorème de Fermat. Énoncer le grand théorème de Fermat et présenter son histoire de Fermat jusqu'à Andrew Wiles. Énoncer la conjecture de Goldbach.
	Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers : existence et unicité (résultat admis).	Utiliser la décomposition en facteurs premiers pour déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel. Utiliser la décomposition en facteurs premiers pour déterminer le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels.	
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>L'arithmétique est un champ mathématique présentant un intérêt historique et culturel majeur. L'énoncé du grand théorème de Fermat ou de la conjecture de Goldbach illustre qu'un énoncé arithmétique simple peut être excessivement difficile à démontrer. Il importe également de présenter aux élèves des applications de l'arithmétique à la cryptographie, qui en font un domaine de recherche extrêmement actif, s'appuyant notamment sur la puissance actuelle des outils de calcul.</p>			
UA Fonctions			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Limites de suites		

Limite (finie ou infinie) d'une suite réelle.	Pour une suite divergeant vers $+\infty$, et un nombre réel A , déterminer un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N, u_n \geq A$.	
Limites et comparaison : - le théorème des gendarmes ; - une suite minorée par une suite tendant vers $+\infty$ tend elle-même vers $+\infty$; - une suite majorée par une suite tendant vers $-\infty$ tend elle-même vers $-\infty$.	Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.	
Opérations sur les limites : limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.		
Convergence d'une suite géométrique.	Déterminer, selon les valeurs du nombre réel q , la limite de q^n lorsque $n \rightarrow +\infty$, après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli : pour tout réel a positif et tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$.	Développement décimal d'un nombre réel.
Limites de suites monotones : - une suite croissante et majorée (ou décroissante et minorée) est convergente (théorème admis) ;	Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.	Suites adjacentes. Introduire des suites pour calculer des valeurs approchées de nombres

	<p>- une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$; une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.</p>		tels que $\sqrt{2}, e, \pi, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
<p style="text-align: center;">Indications didactiques ou pédagogiques, remarques. Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>En S3, les suites étaient étudiées dans l'Unité <i>Nombres et calculs</i>. Sans attacher une importance excessive au basculement vers l'unité d'apprentissage <i>Fonctions</i>, celui-ci provient du fait qu'on s'attache maintenant aux propriétés de convergence des suites, qui relèvent de l'analyse, alors que, dans l'unité d'apprentissage <i>Nombres et calculs</i>, l'accent était mis sur les propriétés algébriques. La notion de limite est présentée de manière intuitive, en s'appuyant notamment sur la vision géométrique et le développement décimal illimité d'un nombre réel (qui suppose la connaissance de la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$). S'il est attendu que le professeur explicite les définitions formelles des limites, leur maîtrise par les élèves n'est pas exigible. Les objectifs sont autres : installer une solide pratique des aspects opératoires, introduire la problématique de l'existence d'une limite (soit par monotonie, soit par comparaison) et mettre en évidence des suites qui n'admettent pas de limites, par exemple : $((-1)^n)_n$. Dans l'unité d'apprentissage matrices et graphes, des suites à valeurs dans \mathbb{R}^2 seront étudiées.</p>			
BLOC 2	Limites et continuité des fonctions		
	<p>Limite (finie ou infinie) d'une fonction en un point.</p> <p>Notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.</p> <p>Interprétation graphique.</p> <p>Asymptote verticale.</p> <p>Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, quotient.</p>	<p>Utiliser la courbe représentative d'une fonction pour visualiser son comportement au voisinage d'un point et déterminer intuitivement la valeur de la limite en ce point.</p> <p>Déterminer de manière intuitive les limites en un point des fonctions de référence, notamment les limites à droite et à gauche en 0 de la fonction inverse.</p>	<p>Exemples de recherche de limites relevant d'une forme indéterminée.</p> <p>Exemples :</p> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

	<p>Limite (finie ou infinie) d'une fonction quand $x \rightarrow \pm\infty$.</p> <p>Interprétation graphique.</p> <p>Asymptote horizontale.</p> <p>Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, quotient.</p>	<p>Utiliser la courbe représentative d'une fonction pour visualiser le comportement de la fonction au voisinage de $\pm\infty$ et déterminer de manière intuitive la valeur de la limite.</p> <p>Déterminer de manière intuitive les limites en $\pm\infty$ des fonctions de référence.</p> <p>Calculer la limite d'une fonction simple quand x tend vers $\pm\infty$ en appliquant les résultats sur les opérations.</p> <p>Types d'exemples de fonctions simples :</p> $x \mapsto \frac{1}{x}; x \mapsto 1 - \frac{1}{x};$	<p>Analogie avec la limite d'une suite.</p> <p>Exemples de recherche de limites relevant d'une forme indéterminée.</p> <p>Exemples :</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1};$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x+1} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1}.$
	<p>Continuité en un point : f est continue en a si de f en a en un point :</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$	<p>Visualiser sur un graphique la continuité en un point.</p>	
	<p>Fonction continue sur un intervalle.</p> <p>Toute fonction dérivable est continue (résultat admis).</p>	<p>Visualiser sur un graphique la continuité sur un intervalle.</p>	<p>Exemples de fonctions non continues (par exemple la fonction caractéristique d'un segment).</p>

	Image d'une suite convergente par une fonction continue.		Étude de suites simples données par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, pour une fonction f continue d'un intervalle dans lui-même.
	Théorème des valeurs intermédiaires (admis). Cas d'une fonction strictement monotone : théorème de la bijection.	Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité.	Écrire des algorithmes de recherche de racines d'équations dont on connaît l'existence (dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton). Coder ces algorithmes en Python.
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>La justification de la continuité d'une fonction sur un intervalle n'est pas un attendu du programme.</p>			
BLOC 3	La fonction logarithme népérien		
	La fonction logarithme népérien \ln définie comme réciproque de la fonction exponentielle. Ensemble de définition, croissance, limites en 0 et en $+\infty$. Courbe représentative. Lien avec la courbe représentative de la fonction exponentielle. Croissance comparée de la fonction	Démontrer les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien à partir de celles de la fonction exponentielle. Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien.	Discuter et résoudre à la main des équations ou des inéquations du type $e^x = a$ $\ln(x) = a$ $e^x \geq a$ $\ln(x) \leq a$ Utiliser les logarithmes pour

	<p>\ln et des fonctions $x \mapsto x^n$ aux voisinages de 0 et de $+\infty$.</p> <p>Propriétés algébriques :</p> $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln(1) = 0$		<p>modéliser certaines situations (PH en chimie, décibels en acoustique, calculs de seuils dans un problème de croissance exponentielle).</p> <p>Utiliser une échelle logarithmique pour déterminer si une évolution est géométrique</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Il y a deux méthodes équivalentes pour introduire la fonction logarithme népérien : comme réciproque de la fonction exponentielle, comme cela a été fait ici, et qui est plus naturel, ou comme primitive de la fonction $\frac{1}{x}$.</p>			
BLOC 4	Compléments sur la dérivation		
<p>Composée de deux fonctions.</p> <p>Dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.</p>	<p>Calculer la dérivabilité d'une fonction mettant en jeu la composition.</p>		
<p>Dérivées des fonctions cosinus, sinus et logarithme népérien :</p> $\cos' x = -\sin x, \sin' x = \cos x, \ln' x = \frac{1}{x}$	<p>En admettant la dérivabilité de la fonction logarithme, calculer sa dérivée.</p>		
<p>Dérivée seconde.</p> <p>Fonctions convexes : définition par la position relative de la courbe représentative et de ses sécantes.</p>	<p>Lire sur la représentation graphique d'une fonction les intervalles où elle est convexe, concave, et ses points d'inflexion.</p>	<p>Inégalité entre moyenne algébrique et moyenne géométrique de deux réels strictement positifs.</p>	

	<p>Pour une fonction dérivable, caractérisation par la position relative de la courbe représentative et de ses tangentes.</p> <p>Pour une fonction deux fois dérivable, caractérisation (admise) par la positivité de la dérivée seconde.</p> <p>Point d'inflexion.</p>	Démontrer une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction.	
	Étude complète d'une fonction : domaine de définition, tableau de variations, limites.	Étudier une fonction et représenter à main levée sa courbe représentative.	
<p><i>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</i></p> <p>On pourra interpréter la formule de la dérivée d'une fonction composée à l'aide des relations de Leibniz :</p> <p>On pose $y = u(x)$ et $z = v(y)$. Alors $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$. On relie ensuite $\frac{dz}{dx}$ à $(v \circ u)'(x)$ et $\frac{dz}{dy}$ à $v'(y) = v'(u(x))$.</p>			
BLOC 5	Primitives		
	<p>Définition d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle.</p> <p>Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.</p>	Interpréter la recherche d'une primitive comme l'opération inverse de la dérivation.	
	Primitives des fonctions de référence :	Calculer des primitives de fonction se ramenant aux fonctions de référence par somme ou par composition, notamment	

	$x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbb{Z}$, en particulier $x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$. Primitives d'une somme.	celles d'une fonction de la forme $(v' \circ u) \times u'$.	
<p style="text-align: center;">Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>La motivation principale pour s'intéresser aux primitives est le calcul intégral, qui sera étudié immédiatement après ce chapitre. Il est intéressant de mentionner que, pour certaines fonctions, on ne dispose pas de primitive explicite.</p>			
BLOC 6	Calcul intégral		
	Définition de l'intégrale, sur un segment $[a, b]$, d'une fonction f continue et positive comme l'aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x) dx$. Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle Si f est continue sur $[a, b]$, alors la fonction $F_a: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .	Estimer graphiquement une intégrale, une valeur moyenne. Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive. Calculer l'aire entre deux courbes.	Exemple de calcul approché et de calcul exact d'une intégrale. On souhaite niveler un terrain (c'est-à-dire mettre sa surface à plat. Un géomètre a effectué une série de mesures donnant la hauteur h du terrain) en fonction de la distance horizontale à un point pris pour origine. Les mesures figurent dans les tableaux ci-dessous

Égalité $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, si F est une primitive de f .

Théorème fondamental de l'analyse :
 $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

d (en m)	0	50	100	150
h (en m)	125	114,06	106,25	102,1

200	250	300	350	400
100	102,1	106,25	114,07	125

450	500	550	600
16,3	156,25	176,56	200

1° Utiliser la méthode des rectangles pour trouver la hauteur approximative du terrain nivelé (pour que les déblais équilibrent les remblais).

2° À l'aide des mesures, on a modélisé le profil du terrain par la fonction

$$d \mapsto h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 125.$$

Représenter graphiquement la fonction h ; interpréter la hauteur du terrain nivelé comme sa valeur moyenne sur

			l'intervalle $[0; 600]$ et comparer le résultat à celui trouvé à la question 1°. 3° Comment le géomètre aurait-il pu améliorer la qualité de son approximation ?
Propriétés de l'intégrale : <ul style="list-style-type: none"> linéarité, positivité, relation de Chasles ; lien avec les inégalités. Encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles.	Encadrer $\int_a^b f(x) dx$ à partir d'un encadrement de f . Calculer la valeur moyenne d'une fonction périodique sur une période et interpréter graphiquement le résultat. Interpréter une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.		
Calculs d'intégrales : - intégration par parties - changement de variables.	Démontrer la formule d'intégration par parties. Utiliser l'intégration par parties et des changements de variables simples pour calculer des intégrales.		
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>1° Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale comme l'aire sous la courbe, ce qui permet d'approcher l'intégrale par la méthode des rectangles. La notation $\int_a^b f(x) dx$ permet d'interpréter l'intégrale comme une somme d'aires de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur dx.</p> <p>2° Le calcul d'intégrale (à l'aide des primitives) est un moyen puissant pour calculer des aires de surfaces planes. L'intégration par parties et les changements de variables sont fondés sur le théorème fondamental de l'analyse :</p>			

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

3° On peut donner une justification heuristique du théorème fondamental de l'analyse dans le cas où la fonction à intégrer est la dérivée de la fonction $d(t)$ qui représente la distance parcourue par un point (exprimée en mètres) en fonction du temps (exprimé en secondes). Cette dérivée $d'(t)$ est la vitesse instantanée du point (elle est exprimée en m/s). La somme

$$\sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i)d'(t_i)$$

est, quand les écarts de longueur $(t_{i+1} - t_i)$ tendent vers 0, une approximation de la distance parcourue $d(b) - d(a)$ entre les instants $t_0 = a$ et $t_n = b$. Mais cette somme est aussi une approximation de l'intégrale $\int_a^b d'(t)dt$. On a donc

$$\sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i)v(t_i) \sim d(b) - d(a) \sim \int_a^b d'(t)dt.$$

4° Les changements de variables sont fournis par l'enseignant, et ne supposent pas de technicité excessive. La notation de Leibniz permet de mémoriser la formule de changement de variable dans $\int_a^b f(x)dx$: posons $x = x(s)$, s variant de u à v avec $x(u) = a, x(v) = b$, on a :

$\frac{dx}{ds} = x'(s)$ donc $dx = x'(s) ds$. On obtient :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_u^v f(x(s))x'(s)ds$$

BLOC 7 Équations différentielles $y' = ay + b$ ($a \neq 0$)

Équation homogène associée $y' = ay$.

Résoudre une équation du type $y' = ay$

La somme de deux solutions et le produit d'une solution par une

en montrant que, si y une solution, la fonction $x \rightarrow y(x)e^{-ax}$ est constante.

	constante sont encore une solution.	Représenter graphiquement l'ensemble des solutions (courbes intégrales).	
	Équation $y' = ay + b$ Résolution de l'équation à partir d'une solution particulière constante.	Démontrer que, si y_1 et y_2 sont deux solutions, alors $y_1 - y_2$ est une solution de l'équation homogène. Déterminer l'unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$	Méthode d'Euler pour tracer de manière approchée la courbe de l'unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$. Écrire l'algorithme et le coder en Python.
Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.			
Le lien doit être fait avec la définition de la fonction exponentielle. Pour travailler le concept d'équations différentielles (équations dont les solutions sont des fonctions), l'enseignant pourra éventuellement dépasser le cadre des équations $y' = ay + b$ en demandant par exemple de vérifier que des fonctions fournies sont solutions d'équations différentielles.			
UA Géométrie			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Produit scalaire dans l'espace		
	Définition du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace à partir de sa définition dans un plan les contenant. Propriétés du produit scalaire :	Exprimer le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace.	Utiliser le produit scalaire pour résoudre des problèmes impliquant des mesures de grandeurs : longueur, angle, aire, volume.

	<p>bilinéarité, symétrie.</p> <p>Orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites, d'un plan et d'une droite.</p>	Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle ou une longueur dans l'espace.	
	<p>Vecteur normal à un plan. Étant donné un point A et un vecteur non nul \vec{n}, plan passant par A et normal à \vec{n}.</p> <p>Projeté orthogonal d'un point sur une droite.</p> <p>Projeté orthogonal d'un point sur un plan.</p>	Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.	
<p><i>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</i></p> <p>L'objectif est d'étendre à l'espace le produit scalaire étudié dans le plan en S3.</p>			
BLOC 2	Géométrie analytique dans l'espace		
	<p>Bases et repères orthonormés de l'espace.</p> <p>Coordonnées d'un point dans un repère orthonormé.</p>	Calculer, dans une base orthonormée, des produits scalaires, des normes, des distances.	<p>Étudier des problèmes de configuration dans l'espace :</p> <ul style="list-style-type: none"> - orthogonalité de deux droites, orthogonalité d'une droite et d'un plan ; - parallélisme d'une droite à un plan.

	Expressions, dans une base orthonormée, du produit scalaire, de la norme, de la distance entre deux points	Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.	Déterminer de manière analytique des lieux géométriques simples, par exemple :
	Représentation paramétrique d'une droite. Représentation paramétrique d'un plan.	Donner la représentation d'une droite définie par un point et un vecteur directeur. Déterminer un point et un vecteur directeur d'une droite à partir d'une représentation paramétrique. Donner la représentation paramétrique d'un plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires. Déterminer un point et deux vecteurs non colinéaires dirigeant un plan donné par une représentation paramétrique.	<ul style="list-style-type: none"> - l'ensemble des points équidistants de deux points A et B donnés ; - l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$; - l'ensemble des points M de l'espace tels que $\ \vec{MA} + \vec{MB}\ = \ \vec{MA} - \vec{MB}\$
	Équation cartésienne d'un plan par la recherche d'un vecteur normal.		Résoudre un système de deux équations linéaires à trois inconnues pour déterminer l'intersection de deux plans. Résoudre un système de deux équations linéaires à trois inconnues pour déterminer un vecteur normal à un plan donné par un point et deux vecteurs non colinéaires ; en

			déduire une équation cartésienne de ce plan.
	Équation cartésienne d'une sphère connaissant son centre et son rayon.		
<p><i>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</i></p> <p>Pour traiter analytiquement un problème géométrique, le choix d'un repère adapté mérite une attention particulière. Selon la nature du problème à résoudre, on utilise les équations cartésiennes ou les représentations paramétriques.</p>			
BLOC 3	Connaître et utiliser les nombres complexes		
	Partie réelle et partie imaginaire. Opérations : somme, produit, inverse d'un nombre complexe non nul, quotient. Conjugué d'un nombre complexe Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance. Formule du binôme dans \mathbb{C} .	Effectuer des calculs algébriques sur des nombres complexes.	Résoudre dans \mathbb{C} une équation du type $az = b$ où a est un nombre complexe non nul et b un nombre complexe. Résoudre des équations simples faisant intervenir z et \bar{z} .
	Plan complexe. Image d'un nombre complexe. Image du conjugué. Affixe d'un point, d'un vecteur.	Représenter un nombre complexe par un point du plan. Déterminer l'affixe d'un point du plan. Déterminer le module et les	Étudier une suite de nombres complexes définie par une relation de récurrence du type $z_{n+1} = az_n + b$. Démontrer l'inégalité triangulaire et étudier le cas d'égalité.

<p>Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.</p> <p>Module d'un produit, d'un inverse.</p> <p>Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique.</p> <p>Forme trigonométrique d'un nombre complexe.</p>	<p>arguments d'un nombre complexe.</p> <p>Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique et vice-versa.</p>	<p>Étudier l'ensemble des nombres complexes de module 1</p>
<p>Exponentielle imaginaire, notation $e^{i\theta}$; formule $e^{i\theta} = 1$</p> <p>Extension admise des propriétés de l'exponentielle réelle.</p> <p>Écriture d'un nombre complexe sous forme exponentielle</p> <p>Formules d'Euler :</p> $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ $\sin \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ <p>Formules trigonométriques d'addition et de duplication</p>	<p>Utiliser l'exponentielle imaginaire pour retrouver les formules d'addition.</p> <p>Les utiliser pour trouver les formules qui s'y ramènent.</p>	<p>Utiliser la formule d'Euler pour linéariser des puissances de $\cos \theta$ ou de $\sin \theta$.</p> <p>Utiliser la formule de Moivre pour exprimer $\cos n\theta$ comme un polynôme en $\cos \theta$.</p>

	démontrées à partir du produit des nombres complexes. Formule de Moivre : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$		
	Résolution, dans \mathbb{C} , d'équations du second degré à coefficients réels, ou d'équations s'y ramenant.	Résoudre une équation du type $z^2 = a$, avec a un nombre complexe quand a est sous forme algébrique et trigonométrique Résoudre une équation du second degré à coefficients réels.	Résolution d'une équation du troisième degré à coefficients réels dont on connaît une racine réelle. Résolution, dans \mathbb{C} , d'équations du second degré à coefficients complexes.
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>L'invention des nombres complexes au XVI^e siècle, et leur développement au cours du XVII^e et du XVIII^e siècles ont constitué une avancée majeure pour les mathématiques, qui aboutit notamment à trouver des solutions pour des équations n'en ayant pas dans \mathbb{R}, comme par exemple l'équation $z^2 = a$ lorsque a est un réel strictement négatif. Les élèves doivent savoir que la notation \sqrt{a} est limitée au cas où a est un nombre réel positif ou nul et que son extension au cas où a est un nombre complexe est prohibée.</p> <p>La formule pour le produit de deux nombres complexes doit être connue des élèves, mais elle est difficile : il faut que les élèves sachent la retrouver par eux-mêmes en utilisant les règles habituelles de calcul et la propriété $i^2 = -1$.</p>			
UA Probabilités			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Utiliser des sommes de variables aléatoires finies		
	Somme de deux variables aléatoires.	Utiliser la propriété de linéarité pour calculer des espérances.	

	<p>Linéarité de l'espérance (résultat admis).</p> <p>Si les variables X et Y sont indépendantes, et si V désigne la variance,</p> <p>V(X + Y) = V(X) + V(Y) (résultat admis).</p>		
	<p>Expression d'une variable aléatoire de loi binomiale B(n, p) comme somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.</p> <p>Espérance et variance d'une loi binomiale.</p>	<p>Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi binomiale.</p>	<p>Utiliser un tableur ou un logiciel de programmation pour représenter par un diagramme en bâtons la loi de probabilité d'une loi binomiale B(n, p).</p> <p>Faire le lien avec l'histogramme des fréquences observées de 1 lors de la simulation de N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques</p> <p>L'objectif est ici d'aborder la loi binomiale sous un autre angle que celui selon lequel elle a été introduite en S3. Son expression comme somme de variables de Bernoulli indépendantes permet d'en calculer facilement l'espérance et la variance. Cela permet également de la simuler informatiquement à partir d'un simple générateur de nombres aléatoires égaux à 0 ou 1 (en sommant le nombre de 1 obtenus).</p>			

BLOC 2	Comprendre le principe de l'échantillonnage et le lien entre fréquence et probabilité		
	<p>Échantillon de taille n d'une variable aléatoire X, défini comme une liste $[X_1, X_2, \dots, X_n]$ de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X.</p>	<p>Si $[X_1, X_2, \dots, X_n]$ est un échantillon d'une variable X, calculer l'espérance et la variance de la somme $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et de la moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$ en fonction de l'espérance et de la variance de X.</p>	
	<p>Version vulgarisée de la loi des grands nombres : « lorsque n est grand, sauf exceptions, la fréquence calculée sur un échantillon est proche de la probabilité ».</p> <p>Estimation d'une probabilité (ou d'une proportion) à l'aide d'une fréquence calculée sur un échantillon.</p>	<p>Simuler (sur un tableur ou un logiciel de programmation) des échantillons d'une loi de Bernoulli de paramètre p en faisant augmenter leur taille n et observer la stabilisation des fréquences autour de p.</p> <p>Pour une valeur de n supérieure à 50, et une valeur de p comprise entre 0,2 et 0,8, simuler, avec un tableur ou un logiciel de programmation, N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli de</p>	<p>Lors d'une élection entre deux candidats, estimer la chance d'élection d'un des candidats à partir d'un sondage et expliquer les limites de ce sondage.</p> <p>Lors d'un contrôle qualité réalisé dans une entreprise industrielle, estimer la proportion d'objets défectueux fabriqués par l'entreprise à partir de la fréquence observée sur un échantillon et expliquer les limites de ce contrôle.</p> <p>Lors d'une campagne de dépistage d'une maladie, estimer la proportion de personnes malades dans la population totale à partir du nombre de malades observés sur un échantillon et expliquer les limites de ce dépistage.</p>

		<p>paramètre p et représenter les fréquences de succès observés par un nuage de points.</p> <p>Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la fréquence observée et p est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et la comparer à 0,95.</p>	
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Une réalisation $[X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)]$ d'un échantillon de la variable aléatoire X est la suite des valeurs prises X sur une sous-population de taille n prélevée au hasard dans la population totale Ω. Cela permet de relier un échantillon d'une loi de probabilité avec un échantillon statistique.</p> <p>La simulation de N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p permet aux élèves de :</p> <ul style="list-style-type: none"> - percevoir la fluctuation des fréquences calculées sur les échantillons ; - percevoir la stabilisation de ces fréquences autour de p (pour de grandes valeurs de n) et comprendre ainsi pourquoi la fréquence f de succès calculée sur un échantillon est une estimation de la probabilité p ; - quantifier la qualité de cette estimation en calculant la proportion des échantillons où l'écart entre f et p est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Si f est une fréquence calculée sur un échantillon, l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ s'appelle un intervalle de confiance à 95 % ; - comprendre que les 5% des fréquences non situées dans l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ expliquent les limites de l'estimation. 			

UA Statistique			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Séries statistiques à deux variables quantitatives		
	Nuage de points associé à une série statistique à deux variables quantitatives. Point moyen.	Représenter un nuage de points à partir de la donnée de deux variables quantitatives. Calculer les coordonnées du point moyen d'un nuage de points. Le calcul sera effectué à la main dans des cas simples et à l'aide d'un outil numérique (calculatrice, tableur, logiciel de programmation).	
	Ajustement affine d'un nuage de points. Coefficient de corrélation linéaire entre deux variables quantitatives.	Déterminer un ajustement affine (d'abord au jugé, puis par la méthode de Mayer, et enfin à l'aide de la droite des moindres carrés) Utiliser un outil numérique (calculatrice, tableur, logiciel de programmation) pour calculer le coefficient de corrélation linéaire entre deux variables.	Dans un premier temps, les ajustements affines peuvent être réalisés graphiquement « au jugé ». L'appréciation de leur qualité peut faire l'objet d'une discussion au sein de la classe. Dans un deuxième temps, la méthode de la <i>droite de Mayer</i> est présentée ; on en donne la définition, et on montre comment la déterminer.

		<p>Interpréter un coefficient de corrélation linéaire.</p> <p>Utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues.</p>	<p>Dans un troisième temps, l'enseignant présente aux élèves la méthode des moindres carrés : recherche d'une droite d'équation $y = ax + b$ réalisant le minimum de $\sum_i (y_i - ax_i)^2$ pour le nuage de points $(x_i ; y_i)$. Il donne l'interprétation géométrique de ce minimum.</p> <p>Les élèves effectuent les calculs des coefficients a et b à la calculatrice ou à l'aide d'un tableur.</p> <p>Avec les différentes méthodes, l'enseignant montre comment effectuer des prédictions de valeurs. Il privilégie les contextes réels, en lien avec la filière :</p> <ul style="list-style-type: none"> - données issues des domaines de la physique ; - mesures expérimentales de grandeurs liées par une relation linéaire en physique-chimie (intensité et tension ; droite d'étalonnage d'une concentration). <p>L'enseignant veille à entraîner les élèves à exercer leur esprit critique sur la pertinence, au regard des données et de la situation étudiée, d'une modélisation par un ajustement affine et sur les limites des extrapolations faites dans ce cadre.</p>
--	--	--	--

	<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Les élèves sont sensibilisés à bien différencier causalité et corrélation. Ceci est une compétence mathématique, bien sûr, mais aussi une compétence citoyenne.</p>		
UA Algorithmique et programmation			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Utiliser des variables, des fonctions, des boucles, des tests et des listes		
	<p>Consolidation des savoirs acquis au cours des années précédentes sur les variables, les fonctions, les boucles, les tests et les listes.</p>	<p>Consolidation des savoir-faire développés au cours des années précédentes sur les variables, les fonctions, les boucles, les tests et les listes.</p>	<p>Écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel non nul et qui renvoie la liste des bits de son écriture en base 2.</p> <p>Écrire une fonction qui prend en argument une liste de 0 et de 1 et qui renvoie le nombre entier écrit en base dix dont cette liste est l'écriture en base deux.</p> <p>Écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel non nul et qui renvoie la liste de ses facteurs premiers.</p>
BLOC 2	Utiliser un tableur ou un langage de programmation textuel pour simuler une expérience aléatoire ou une variable aléatoire		
	<p>Fonction ALEA() du tableur retournant un nombre aléatoire compris entre 0 inclus et 1 exclu.</p> <p>Fonction random() de la</p>	<p>À l'aide des fonctions ALEA() et ENT() du tableur, écrire une fonction renvoyant de manière aléatoire un nombre entier compris entre deux entiers a et b.</p>	<p>Simuler au tableur 100, puis 1000, puis 5000 lancers successifs d'un dé à six faces bien équilibré.</p> <p>Dans chaque cas, représenter par un histogramme la distribution des fréquences d'apparition de chaque chiffre entre 1 et 6 et</p>

	<p>bibliothèque random du logiciel Python retournant un nombre aléatoire compris entre 0 inclus et 1 exclu.</p> <p>Fonction randint(a,b)de la bibliothèque random du logiciel Python retournant un nombre entier aléatoire compris entre les entiers ainclus et b inclus.</p>	<p>Simuler au tableur ou en Python le lancer d'une pièce de monnaie.</p> <p>Simuler au tableur ou en Python le lancer d'un dé à 6 faces.</p> <p>Simuler en Python une variable aléatoire.</p>	<p>les comparer à la probabilité correspondante.</p> <p>Réaliser des activités similaires en Python.</p> <p>Simuler au tableur la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus lors du lancer de deux dés bien équilibrés à 6 faces.</p> <p>Simuler des échantillons de tailles 100, puis 1000, puis 5000 de cette variable aléatoire et représenter par un histogramme la distribution des fréquences.</p> <p>Réaliser des activités similaires en Python.</p>
--	---	---	---

UA Raisonnement, logique

Il n'est pas attendu que les enseignants présentent les notions de cette unité d'apprentissage dans un cours qui leur serait spécifiquement dédié. Au contraire, c'est à l'occasion de la rencontre de ces notions dans les autres unités d'apprentissage (géométrie, probabilités, calcul algébrique, arithmétique, algorithmique et programmation) que le professeur les formalisera. Cette unité vise simplement à synthétiser tout ce qui est attendu des élèves en fin de 4^{ème} année.

	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Consolider la connaissance du vocabulaire mathématique de base		
	Consolidation des notions d'ensemble, d'élément d'un	Écrire un ensemble en extension (s'il est fini) ou en compréhension.	Pour des valeurs numériques de m et n ,

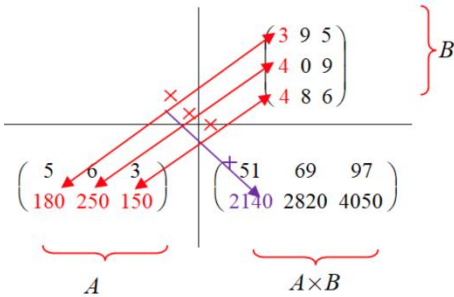
	<p>ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire.</p> <p>Symboles mathématiques correspondants : \in, \subset, \cap, \cup.</p> <p>Diagramme de Venn.</p> <p>Notation des ensembles de nombres et des intervalles de \mathbb{R}.</p>	<p>Déterminer l'intersection et la réunion de deux intervalles de \mathbb{R}.</p>	<p>représenter par un diagramme de Venn l'ensemble des diviseurs communs à m et à n.</p> <p>De manière littérale, écrire en compréhension l'ensemble des diviseurs communs à deux entiers naturels m et n.</p> <p>De manière littérale, écrire en compréhension l'ensemble des multiples communs à deux entiers naturels m et n.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A d'un ensemble E, on utilise à la fois la notation des probabilités A^c et la notation $E \setminus A$. La détermination de l'intersection et de la réunion de deux intervalles de \mathbb{R} est traitée dans différentes configurations (intervalles ayant une intersection non vide, intervalles adjacents, intervalles disjoints).</p>			
<p>BLOC 2</p>	<p>Consolider la lecture et l'écriture de propositions mathématiques</p>		
<p>Proposition mathématique : utilisation des quantificateurs universel (symbole \forall) et existentiel (symboles \exists ; $\exists!$)</p> <p>Conditions nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante ; lien avec les symboles \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow.</p>	<p>Formuler (en langage naturel et en langage mathématique) la négation d'une proposition contenant un ou plusieurs quantificateurs.</p> <p>Formuler (en langage naturel et en langage mathématique) la réciproque d'une implication.</p> <p>Formuler (en langage naturel et en langage mathématique) la contraposée d'une implication.</p>	<p>Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :</p> <p>$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} ; y \geq x$</p> <p>$\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} ; y \geq x$</p> <p>$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} ; x \leq y^2$</p> <p>$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} ; x \leq y^2$</p> <p>Écrire la négation de chacune des</p>	

		<p>Formuler une équivalence logique.</p> <p>Identifier la condition nécessaire et la condition suffisante d'une implication :</p> <p>$A \Rightarrow B$: B est une condition nécessaire de A</p> <p>$B \Rightarrow A$: B est une condition suffisante de A</p> <p>$A \Leftrightarrow B$: A est une condition nécessaire et suffisante de B.</p>	<p>propositions précédentes.</p> <p>On aura intérêt à faire réfléchir régulièrement les élèves sur des questions simples, du type : quelle est la négation de la propriété $x \leq 0$?</p> <p>Quelle est la négation de la propriété $x \in [0,1[$?</p> <p>On fera réfléchir les élèves sur des assertions mal formulées ; par exemple, l'égalité $\sin x = x$ écrite sans quantificateur n'a pas de sens.</p> <p>Les écritures correctes sont :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = x$, qui est une proposition fausse. • $\exists x \in \mathbb{R}, \sin x = x$, qui est une proposition vraie.
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>On attirera avec insistance l'attention des élèves sur la différence entre implication et équivalence, et sur le fait que démontrer une équivalence dont on ne connaît pas de caractérisation revient à démontrer deux implications.</p>			

BLOC 3	Consolider la formalisation des raisonnements mathématiques déjà étudiés	
	<p>Raisonnement par disjonction de cas.</p> <p>Raisonnement par l'absurde.</p> <p>Raisonnement par récurrence.</p>	<p>Dans le cadre de la résolution de problèmes, mobiliser des raisonnements et les rédiger sous la forme de démonstrations.</p> <p>Soit f une fonction monotone sur \mathbb{R}.</p> <p>On note $f \circ f$ la fonction qui à tout x associe $f(f(x))$.</p> <p>Démontrer par disjonction de cas que $f \circ f$ est croissante sur \mathbb{R}.</p> <p>Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que l'ensemble des nombres premiers est infini.</p> <p>Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la somme des n premiers entiers impairs est égal à n^2.</p> <p>Utiliser un raisonnement par récurrence pour étudier des suites définies par leur premier terme et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque f est une fonction croissante.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Les élèves sont entraînés à reconnaître des analogies et des particularités entre un problème à résoudre et une situation déjà connue. En géométrie, les élèves doivent comprendre que, si l'observation d'une figure est un support au raisonnement, elle ne peut en aucune manière s'y substituer. Dans une démarche inductive, à la suite d'essais sur des cas particuliers, les élèves sont amenés à émettre des conjectures qu'ils devront ensuite prouver à l'aide d'une démonstration ou infirmer en produisant un contre-exemple.</p>		

UA Matrices et graphes			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Matrices		
	<p>Matrice à n lignes et m colonnes à coefficients réels.</p> <p>Matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée.</p> <p>Notations :</p> <ul style="list-style-type: none"> • a_{ij} pour le terme de la ligne i et la colonne j • matrice $n \times m$ pour une matrice à n lignes et m colonnes. 	<p>Identifier les lignes et les colonnes d'une matrice.</p>	
	<p>Opérations : somme de matrices de même dimension, produit d'une matrice par un nombre réel.</p> <p>Produit d'une matrice A à p lignes et n colonnes par une matrice B à n lignes et m colonnes.</p>	<p>Reconnaître que la matrice produit est une matrice (n, p).</p> <p>Utiliser la disposition</p>	<p>Exemple d'exercice possible :</p> <p>Trois magasins (M1, M2, M3) proposent à la vente cinq produits p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 dont les prix unitaires sont donnés par le tableau suivant :</p>

Notations $A \times B$ ou AB .



Prix unitaire (en \$)	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
M1	1	5	2	3	4
M2	1,1	4,7	1,8	3,1	3,8
M3	0,9	5,1	1,9	3,2	4

Un client veut acheter deux produits p_1 , un produit p_2 , trois produits p_3 , trois produits p_4 , et deux produits p_5 .

Effectuer le produit d'une matrice (dite matrice de prix) 5×3 par une matrice colonne (dite matrice des quantités) pour déterminer le prix du panier total de l'acheteur dans chacun des trois magasins et déterminer le magasin dans lequel il a intérêt à effectuer ses achats.

Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.

On fera observer que le produit d'une matrice $p \times n$ et d'une matrice $n \times m$ est une matrice $p \times m$: pour que la multiplication soit possible, il faut que le même entier n soit la dimension à droite de la matrice de gauche, et la dimension à gauche de la matrice de droite. Une fois le produit effectué, l'entier n n'apparaît plus.

BLOC 2	Puissances d'une matrice carrée	
	Puissances A^n (n entier naturel) d'une matrice carrée A .	Calculer (à la main ou à l'aide d'une calculatrice) des puissances positives d'une matrice donnée (pour des valeurs numériques de l'exposant).
	<p>Évolution couplée de deux suites récurrentes.</p> <p>Modélisation par une relation de récurrence $X_{n+1} = M X_n$, où M est une matrice 2×2 et X_n et X_{n+1} sont deux matrices 2×1.</p> <p>Égalité $X_n = M^n X_0$ où X_0 représente l'état initial du système.</p>	<p>Pour des valeurs numériques de n, calculer l'état du système au bout de n étapes en fonction de son état initial.</p>
	<p>Utiliser une récurrence pour calculer la puissance n-ième d'une matrice.</p> <p>Modèle « proie-prédateur » discrétisé. Étude asymptotique et interprétation.</p> <p>Exemple d'exercice possible :</p> <p>Dans le cadre d'une étude scientifique, des souris sont enfermées dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces deux compartiments est ouverte pendant un quart d'heure tous les jours jour à midi.</p> <p>On suppose qu'au départ les deux compartiments contenaient le même effectif de souris.</p> <p>Les observations ont montré que, chaque jour :</p> <p>20% des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la</p>	

			<p>porte se trouvent dans le compartiment B après la fermeture de la porte.</p> <p>10% des souris présentes dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après la fermeture de la porte.</p> <p>On note a_n (resp b_n) la proportion de souris présentes dans le compartiment A (resp B) au bout de n jours.</p> <p>On note X_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.</p> <p>Déterminer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n et la matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$.</p> <p>Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de n jours.</p> <p>Étudier ce qui se passe lorsque $n \rightarrow +\infty$.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>L'objectif est ici d'utiliser les matrices pour traduire l'évolution d'un système discret couplé.</p> <p>Lors de la résolution de problèmes, l'utilisation d'une calculatrice permet de limiter le temps consacré à des calculs techniques (notamment des produits et des puissances de matrices) et de se concentrer sur les aspects liés à la modélisation et au raisonnement.</p> <p>Toujours lors de la résolution de problèmes, il est possible d'aborder le comportement asymptotique d'un système couplé en étudiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$. La limite d'une suite de matrices est constituée, sous réserve d'existence, des limites de ses coefficients.</p>			

BLOC 3	Matrice d'adjacence d'un graphe		
	Matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre p , orienté ou non orienté.	Écrire la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non).	
	La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.	Construire un graphe dont la matrice d'adjacence est donnée.	
	Théorème (admis) : soit M la matrice d'adjacence associée à un graphe non orienté G , le nombre de chaînes de longueur n reliant le sommet i au sommet j est le coefficient $m_{ij}^{(n)}$ de la matrice M^n . Pour un graphe orienté, même résultat pour le nombre de chemins de longueur n sortant de i et arrivant en j .	Vérifier ces deux théorèmes sur des exemples. Démontrer l'une des deux parties du théorème dans le cas où $n = 2$.	Démontrer l'un de ces deux théorèmes par récurrence dans le cas général. Explorer des scénarios réels où le calcul du nombre de chaînes de longueur n est utile.
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>L'objectif est de relier les matrices et les graphes et de comprendre la puissance du calcul matriciel pour étudier certaines propriétés des graphes.</p>			
BLOC 4	Chaines de Markov à 2 ou 3 états		
	Chaîne de Markov. Chaîne de Markov homogène. Matrice de transition d'une chaîne	Reconnaître une chaîne de Markov. Déterminer la matrice de transition d'une chaîne de Markov.	Donner des exemples de chaînes de Markov à 2 ou 3 états.

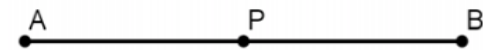
	<p>de Markov homogène.</p> <p>Graphe orienté et pondéré d'une chaîne de Markov.</p>	<p>Démontrer que la matrice de transition d'une chaîne de Markov est une matrice stochastique.</p> <p>Associer un graphe orienté et pondéré à une chaîne de Markov à 2 ou 3 états.</p>	
	<p>Distributions de probabilité d'une chaîne de Markov.</p> <p>La matrice ligne π_n donnant la distribution à l'étape n (après n transitions) d'une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n Q$, et donc $\pi_n = \pi_0 Q^n$, où π_0 est la matrice ligne représentant la distribution initiale.</p> <p>Distribution invariante (on dit encore stationnaire, ou stable) : distribution π vérifiant</p> <p>$\pi = \pi Q$.</p>	<p>Pour une chaîne de Markov dont la matrice de transition Q est donnée, et pour des petites valeurs de n, calculer la distribution de probabilités π_n à l'étape n en fonction de Q et de la distribution initiale π_0.</p>	<p>Exemples d'exercices possibles :</p> <p>Graphe d'ordre 2</p> <p>Deux grossistes A et B se partagent la clientèle d'un produit industriel. On suppose que le nombre total de clients reste fixe d'une année sur l'autre. En 2022, 45% des clients se fournissaient chez le grossiste A et 55% chez le grossiste B. On admet que, d'une année sur l'autre, 6% des clients du grossiste A deviennent clients du grossiste B tandis que le grossiste B conserve 86% de ses clients. Chaque année, on choisit au hasard un client ayant acheté le liquide. Pour tout entier naturel n on note a_n la probabilité qu'il soit client du grossiste A en 2022 + n, et b_n la probabilité qu'il soit client</p>

	<p>Si chaque terme de la suite (π_n) converge, alors la matrice ligne composée des limites, notée (π_∞), est une distribution stable (résultat admis).</p>	<p>Dans le cas où les termes de la suite (π_n) convergent, comprendre que le système se rapproche d'un état stable.</p>	<p>du grossiste B en 2022 + n.</p> <p>On note $\pi_n = (a_n, b_n)$ la matrice ligne représentant la distribution de probabilité en 2022 + n.</p> <p>Représenter la situation par un graphe et calculer sa matrice de transition.</p> <p>À quelle répartition des clients doit-on s'attendre en 2030 ?</p> <p>La suite (π_n) est-elle convergente ?</p> <p>Graphe d'ordre 3 :</p> <p>On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires. On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.</p> <p>Ce processus peut être vu comme une marche aléatoire sur un espace à trois états :</p> <p>A : il y a 0 boule blanche dans U ;</p> <p>B : il y a 1 boule blanche dans U ;</p> <p>C : il y a 2 boules blanches dans U.</p>
--	---	--	--

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe orienté et pondéré et déterminer sa matrice de transition.
2. Pour tout entier naturel n , on note π_n la distribution du système après n transitions.
3. On admet que la suite (π_n) converge vers une matrice ligne π . Déterminer π et l'interpréter.

Marche aléatoire sur un segment :

Un personnage se déplace d'un sommet à l'autre du graphe ci-dessous selon la loi suivante :



S'il est en A ou en B, il ne peut aller qu'en P ; s'il est en P, il peut aller en A ou en B avec la même probabilité $\frac{1}{2}$. Représenter la situation

par un graphe et donner la matrice de transition G de ce graphe

Calculer G^2 et G^3 et en déduire la valeur de G^n en discutant selon la parité de n .

Interpréter le résultat en terme de distribution de probabilités.

			La suite (G^n) est-elle convergente ? La chaîne de Markov admet-elle une distribution stationnaire ?
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>L'étude des chaînes de Markov utilise les probabilités conditionnelles vues en S3 et la formule des probabilités totales. Il conviendra donc de commencer l'étude par un rappel sur ces notions. On se limite aux chaînes de Markov à 2 ou 3 états. Il convient de noter qu'une chaîne de Markov n'admet pas toujours de distribution stationnaire et que la suite (π_n) des distributions de probabilité n'est pas toujours convergente.</p>			

Année 4 : série « Sciences économiques et sociales »

UA Fonctions			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Limites de suites		
	Limite (finie ou infinie) d'une suite réelle. Opérations sur les limites : limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.	Calculer des limites de suites.	Interpréter graphiquement la convergence ou la divergence d'une suite.
	Convergence d'une suite géométrique.	Déterminer, selon les valeurs du nombre réel q , la limite de q^n lorsque $n \rightarrow +\infty$.	

	<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>En S3, les suites ont été étudiées dans l'Unité <i>Nombres et calculs</i>. Sans attacher une importance excessive au basculement vers l'unité d'apprentissage <i>Fonctions</i>, celui-ci provient du fait qu'on s'attache maintenant aux propriétés de convergence des suites, qui relèvent de l'analyse, alors que, dans l'unité d'apprentissage <i>Nombres et calculs</i>, l'accent était mis sur les propriétés algébriques. La notion de limite est présentée de manière intuitive, en s'appuyant sur la vision géométrique. Les objectifs sont d'installer une solide pratique des aspects opératoires et l'étude de la convergence de certaines suites, comme les suites géométriques et mettre en évidence des suites qui n'admettent pas de limites, par exemple : $((-1)^n)_n$. Dans l'unité d'apprentissage matrices et graphes, des suites à valeurs dans \mathbb{R}^2 seront étudiées.</p>		
BLOC 2	Limites et continuité des fonctions		
<p>Limite finie ou infinie d'une fonction en un point.</p> <p>Notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.</p> <p>Interprétation graphique. Asymptote verticale.</p> <p>Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, quotient.</p>	<p>Utiliser la courbe représentative d'une fonction pour visualiser son comportement au voisinage d'un point et déterminer intuitivement la valeur de la limite en ce point.</p> <p>Déterminer de manière intuitive les limites en un point des fonctions de référence, notamment les limites à droite et à gauche en 0 de la fonction inverse.</p>		
<p>Limite (finie ou infinie) d'une fonction quand</p> <p>$x \rightarrow \pm\infty$.</p> <p>Interprétation graphique.</p> <p>Asymptote horizontale.</p>	<p>Utiliser la courbe représentative d'une fonction pour visualiser le comportement de la fonction au voisinage de $\pm\infty$ et déterminer de manière intuitive la valeur de la limite.</p>	<p>Analogie avec la limite d'une suite.</p>	

<p>Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, quotient.</p>	<p>Déterminer de manière intuitive les limites en $\pm\infty$ des fonctions de référence.</p> <p>Calculer la limite d'une fonction simple quand x tend vers $\pm\infty$ en appliquant les résultats sur les opérations.</p> <p>Types d'exemples de fonctions simples :</p> $x \mapsto \frac{1}{x} ; x \mapsto 1 - \frac{1}{x} ;$	
<p>Fonction continue sur un intervalle.</p> <p>Toute fonction dérivable est continue (résultat admis).</p>	<p>Visualiser sur un graphique la continuité d'une fonction sur un intervalle.</p>	<p>Exemples de fonctions non continues (fonction caractéristique d'un segment).</p>
<p>Théorème des valeurs intermédiaires (admis).</p> <p>Cas d'une fonction strictement monotone.</p>	<p>Étudier les solutions d'une équation du type</p> $f(x) = k : \text{existence, unicité.}$	<p>Écrire des algorithmes de recherche de racines d'équations dont on connaît l'existence (dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton).</p> <p>Coder ces algorithmes en Python.</p>
<p><i>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</i></p> <p>La justification de la continuité d'une fonction sur un intervalle n'est pas un attendu du programme. En s'appuyant sur les représentations graphiques, l'enseignant met en évidence l'importance de la continuité dans le théorème des valeurs intermédiaires.</p>		

BLOC 3	La fonction logarithme décimal		
	<p>La fonction logarithme décimal. Notation \log.</p> <p>Pour tout réel $b > 0$, $\log(b)$ est défini comme l'unique solution de l'équation $10^x = b$</p> <p>Ensemble de définition, croissance.</p> <p>Courbe représentative.</p> <p>Propriétés algébriques : pour tous réels strictement positifs a, b, x,</p> <p>$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$;</p> <p>$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$;</p> <p>$\log(a^x) = x \log(a)$.</p>	<p>Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal.</p> <p>Passer au logarithme décimal pour résoudre des équations du type $a^x = b$ ou $x^a = b$, lorsque a et b sont des réels strictement positifs.</p> <p>Passer au logarithme décimal pour résoudre des équations du type $a^x \geq b$ ou $x^a \geq b$, lorsque a et b sont des réels strictement positifs.</p>	<p>Dans le cas d'un placement à intérêts composés à taux fixe, recherche d'un nombre d'annuités.</p> <p>Représenter une série statistique ou une fonction dans un repère logarithmique ou semi-logarithmique.</p>
BLOC 4	La fonction exponentielle de base e et la fonction logarithme népérien		
	<p>Définition de la fonction $x \mapsto e^x$ comme l'unique fonction $x \mapsto a^x$ en laquelle la tangente en 0 a pour coefficient directeur 1.</p> <p>Le nombre e.</p>	<p>Représenter graphiquement la courbe de la fonction $x \mapsto e^x$.</p>	<p>Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour faire varier le paramètre a dans la représentation des fonctions $x \mapsto a^x$ jusqu'à identifier celui pour lequel la pente de la tangente en 0 vaut 1.</p>

<p>Dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ (résultat admis).</p> <p>Variations, limites, courbe représentative.</p> <p>Croissance comparée avec les fonctions $x \mapsto x^n$ au voisinage de $+\infty$.</p>		
<p>Définition du logarithme népérien : pour tout réel $b > 0$, $\ln(b)$ est défini comme l'unique solution de l'équation $e^x = b$.</p> <p>Domaine de définition.</p> <p>Dérivée, variations.</p> <p>Limites en 0 et en $+\infty$.</p> <p>Courbe représentative.</p> <p>Propriétés algébriques.</p> <p>Lien entre les fonctions logarithme népérien et logarithme décimal.</p>	<p>Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien.</p> <p>Résoudre des équations ou des inéquations mettant en jeu des logarithmes ou des exponentielles.</p>	
<p><i>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</i></p> <p>La fonction $x \mapsto e^x$ est présentée comme une fonction $x \mapsto a^x$ particulière. Ses propriétés algébriques découlent donc de celles des fonctions $x \mapsto a^x$. La fonction logarithme népérien est définie comme la réciproque de la fonction $x \mapsto e^x$, comme l'a été la fonction logarithme décimal à partir de la fonction $x \mapsto 10^x$.</p>		

BLOC 5	Primitives		
	Définition d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.	Interpréter la recherche d'une primitive comme l'opération inverse de la dérivation.	
	Primitives des fonctions : $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbb{Z}$; cas particulier où $n = -1$. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x \mapsto e^x$. Primitives d'une somme.	Interpréter la fonction logarithme népérien comme la primitive, sur \mathbb{R}^{+*} , de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Calculer des primitives de fonctions se ramenant aux fonctions de référence.	
	Indications didactiques ou pédagogiques, remarques La motivation principale pour s'intéresser aux primitives est le calcul intégral, qui sera étudié immédiatement après ce chapitre. Il est intéressant de mentionner que, pour certaines fonctions, on ne dispose pas de primitive explicite.		
BLOC 5	Calcul intégral		
	Définition de l'intégrale, sur un segment $[a, b]$, d'une fonction f continue et positive comme l'aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x) dx$.	Estimer graphiquement une intégrale. Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.	Mettre en regard les écritures $\int_a^b f(x) dx$ et $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$.

	<p>Si f est continue sur $[a, b]$, alors la fonction $F_a: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.</p> <p>Égalité $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, si F est une primitive de f, ou, autrement dit :</p> <p>$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$, si F est dérivable à dérivée continue.</p>	Calculer l'aire entre deux courbes.	
	<p>Propriétés de l'intégrale :</p> <ul style="list-style-type: none"> - linéarité, positivité, relation de Chasles ; - lien avec les inégalités. <p>Encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles.</p>	Encadrer $\int_a^b f(x) dx$ à partir d'un encadrement de f .	<p>Algorithmes de calcul approché d'intégrales :</p> <ul style="list-style-type: none"> - méthode des rectangles ; - approche probabiliste : méthode de Monte Carlo. <p>Coder ces algorithmes en Python.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>1° Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale comme l'aire sous la courbe, ce qui permet d'approcher l'intégrale par la méthode des rectangles. La notation $\int_a^b f(x) dx$ permet d'interpréter l'intégrale comme une somme d'aires de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur dx.</p> <p>2° Ils apprennent à maîtriser le calcul approché (à partir de la méthode des rectangles) et le calcul exact à partir d'une primitive. La formule d'intégration par parties et les changements de variables ne figurent pas dans ce programme.</p>			
BLOC 6	Équations différentielles $y' = ay$ ($a \neq 0$)		
	Résolution en montrant que la fonction	Interpréter la fonction $x \mapsto e^x$ comme la solution de l'équation différentielle	Traiter des situations dans lesquelles la variation

	$x \mapsto y(x) \times e^{-ax}$ est constante.	$y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$. Résoudre des équations du type $y' = ay$. Déterminer l'unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$.	instantanée d'une grandeur continue est proportionnelle à sa valeur courante : doublement d'une population, désintégration radioactive, etc.
<p style="color: red;">Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> L'objectif est d'introduire la notion de solution d'une équation différentielle, de réinterpréter la fonction exponentielle comme solution de l'équation différentielle $y' = y$.			
UA Géométrie			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Vecteurs de l'espace		
	Calcul vectoriel dans l'espace : extension des opérations entre vecteurs du plan. Vecteurs colinéaires. Vecteurs coplanaires	Étudier si deux vecteurs sont colinéaires. Étudier si trois vecteurs sont coplanaires.	Traiter géométriquement des problèmes de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).
	<p style="color: red;">Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> L'extension des vecteurs du plan à ceux de l'espace s'opère de façon naturelle.		
BLOC 2	Géométrie analytique dans l'espace		
	Coordonnées d'un point de l'espace (abscisse, ordonnée, altitude).	Calculer des distances.	

	Coordonnées d'un vecteur. Distance entre deux points.		
	Condition sur leurs coordonnées pour que deux vecteurs soient orthogonaux.	Étudier l'orthogonalité de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées.	
	Équation cartésienne d'un plan (résultat admis). Équations cartésiennes d'une droite (résultat admis).	Déterminer une équation cartésienne d'un plan parallèle à l'un des axes de coordonnées. Reconnaître une équation de plan. Interpréter une droite comme l'intersection de deux plans.	Résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues pour déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan. Résoudre un système de deux équations linéaires à trois inconnues pour déterminer l'intersection de deux plans.
<p><i>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</i></p> <p>La détermination d'une équation cartésienne d'un plan dans le cas général n'est pas au programme : il est seulement attendu des élèves qu'ils sachent qu'une équation de la forme $ax + by + cz = d$ est celle d'un plan. Intuitivement, ils comprennent qu'une droite peut être envisagée comme l'intersection de deux plans.</p>			
UA Probabilités			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Utiliser des sommes de variables aléatoires finies		
	Somme de deux variables aléatoires. Espérance de la somme de deux variables aléatoires (résultat admis). Si les	Calculer l'espérance de la somme de deux ou plusieurs variables aléatoires.	

	variables X et Y sont indépendantes, et si V désigne la variance, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ (résultat admis).		
	Expression d'une variable aléatoire de loi binomiale $B(n, p)$ comme somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p . Espérance et variance d'une loi binomiale.	Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi binomiale.	Utiliser un tableur ou un logiciel de programmation pour représenter par un diagramme en bâtons la loi de probabilité d'une loi binomiale $B(n, p)$. Faire le lien avec l'histogramme des fréquences observées de 1 lors de la simulation de N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p .
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques</p> <p>L'objectif est ici d'aborder la loi binomiale sous un autre angle que celui selon lequel elle a été introduite en S3. Son expression comme somme de variables de Bernoulli indépendantes permet d'en calculer facilement l'espérance et la variance. Cela permet également de la simuler informatiquement à partir d'un simple générateur de nombres aléatoires égaux à 0 ou 1 (en sommant le nombre de 1 obtenus).</p>			
BLOC 2	Comprendre le principe de l'échantillonnage et le lien entre fréquence et probabilité		
	Échantillon de taille n d'une variable aléatoire X , défini comme une liste $[X_1, X_2, \dots, X_n]$ de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X .	Si $[X_1, X_2, \dots, X_n]$ est un échantillon d'une variable X , calculer l'espérance et la variance de la somme $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et de la moyenne	

		$M_n = \frac{S_n}{n}$ en fonction de l'espérance et de la variance de X .	
	<p>Version vulgarisée de la loi des grands nombres : « lorsque n est grand, sauf exceptions, la fréquence calculée sur un échantillon est proche de la probabilité ».</p> <p>Estimation d'une probabilité (ou d'une proportion) à l'aide d'une fréquence calculée sur un échantillon.</p>	<p>Simuler (sur un tableur ou un logiciel de programmation) des échantillons d'une loi de Bernoulli de paramètre p en faisant augmenter leur taille n et observer la stabilisation des fréquences autour de p.</p> <p>Pour une valeur de n supérieure à 50, et une valeur de p comprise entre 0,2 et 0,8, simuler, avec un tableur ou un logiciel de programmation, N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p et représenter les fréquences de succès observés par un nuage de points.</p> <p>Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la fréquence observée et p est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et la comparer à 0,95.</p>	<p>Lors d'une élection entre deux candidats, estimer la chance d'élection d'un des candidats à partir d'un sondage et expliquer les limites de ce sondage.</p> <p>Lors d'un contrôle qualité réalisé dans une entreprise industrielle, estimer la proportion d'objets défectueux fabriqués par l'entreprise à partir de la fréquence observée sur un échantillon et expliquer les limites de ce contrôle.</p> <p>Lors d'une campagne de dépistage d'une maladie, estimer la proportion de personnes malades dans la population totale à partir du nombre de malades observés sur un échantillon et expliquer les limites de ce dépistage.</p>

<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques. Une réalisation $[X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)]$ d'un échantillon de la variable aléatoire X est la suite des valeurs prises X sur une sous-population de taille n prélevée au hasard dans la population totale Ω. Cela permet de relier un échantillon d'une loi de probabilité avec un échantillon statistique. La simulation de N échantillons de taille n de d'une loi de Bernoulli paramètre p permet aux élèves de :</p> <ul style="list-style-type: none"> - percevoir la fluctuation des fréquences calculées sur les échantillons ; - percevoir la stabilisation de ces fréquences autour p (pour de grandes valeurs de n) et comprendre ainsi pourquoi la fréquence f de succès calculée sur un échantillon est une estimation de la probabilité p ; - quantifier la qualité de cette estimation en calculant la proportion des échantillons où l'écart entre f et p est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Si f est une fréquence calculée sur un échantillon, l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ s'appelle un intervalle de confiance à 95 % ; - comprendre comment les 5% des fréquences non situées dans l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ expliquent les limites de l'estimation. 			
UA Statistique			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Séries statistiques à deux variables quantitatives		
	Nuage de points associé à une série statistique à deux variables quantitatives.	Représenter un nuage de points à partir de la donnée de deux variables quantitatives.	

	<p>Ajustement affine d'un nuage de points.</p> <p>Coefficient de corrélation linéaire entre deux variables quantitatives.</p>	<p>Déterminer un ajustement affine au jugé, puis à l'aide de la droite des moindres carrés.</p> <p>Utiliser un outil numérique (calculatrice, tableur, logiciel de programmation) pour calculer le coefficient de corrélation linéaire entre deux variables.</p> <p>Interpréter le coefficient de corrélation linéaire.</p> <p>Utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues.</p>	<p>Dans un premier temps, les ajustements affines peuvent être réalisés graphiquement « au jugé ». L'appréciation de leur qualité peut faire l'objet d'une discussion au sein de la classe.</p> <p>Dans un deuxième temps, la méthode de la <i>droite de Mayer</i> est présentée ; on en donne la définition, et on montre comment la déterminer.</p> <p>Dans un troisième temps, l'enseignant présente aux élèves la méthode des moindres carrés : recherche d'une droite d'équation $y = ax + b$ réalisant le minimum de $\sum_i (y_i - ax_i)^2$ pour le nuage de points $(x_i ; y_i)$. Il donne l'interprétation géométrique de ce minimum.</p> <p>Les élèves effectuent les calculs des coefficients a et b à la calculatrice ou à l'aide d'un tableur.</p> <p>Avec les différentes méthodes,</p>
--	---	---	--

			<p>l'enseignant montre comment effectuer des prédictions de valeurs. Il privilégie les contextes réels, en lien avec les domaines des sciences économiques et des sciences sociales.</p> <p>L'enseignant veille à entraîner les élèves à exercer leur esprit critique sur la pertinence, au regard des données et de la situation étudiée, d'une modélisation par un ajustement affine et sur les limites des extrapolations faites dans ce cadre.</p>
<p><i>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</i></p> <p>Les élèves sont sensibilisés à bien différencier causalité et corrélation. Ceci est une compétence mathématique, bien sûr, mais aussi une compétence citoyenne.</p>			
UA Algorithmique et programmation			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Notion de fonction informatique		
	<p>Fonction informatique sans paramètre.</p> <p>Fonction informatique à un ou plusieurs paramètres.</p>	<p>Écrire en Python une fonction avec ou sans paramètre.</p>	<p>Écrire des fonctions renvoyant l'aire d'une figure plane (carré, rectangle, triangle) ou le volume d'un solide (pyramide, cylindre)</p>

			<p>en fonction de leurs mesures.</p> <p>Écrire des fonctions de conversions d'unités.</p> <p>Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel non nul et qui renvoie la liste des bits de son écriture en base 2.</p> <p>Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste de 0 et de 1 et qui renvoie le nombre entier écrit en base dix dont cette liste est l'écriture en base deux.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>La création d'une fonction permet de donner un nom à un ensemble d'instructions et de simplifier le corps principal d'un programme, en dissimulant un algorithme secondaire sous une commande unique, possédant le nom de la fonction. C'est en quelque sorte un sous-programme.</p> <p>Le mot « fonction » a donc un sens différent en mathématiques et en informatique.</p> <p>Autres précisions de vocabulaire :</p> <ul style="list-style-type: none"> - un paramètre est une variable qui permet de faire varier le résultat d'une fonction selon les valeurs qui lui seront attribuées lors des différents appels de la fonction ; - un argument est une valeur passée à la place d'un paramètre lors de l'appel de la fonction. 			
BLOC 2	Utiliser un tableur ou un langage de programmation textuel pour simuler une expérience aléatoire ou une variable aléatoire		
	Fonction ALEA() du tableur retournant un nombre aléatoire compris entre 0	À l'aide des fonctions ALEA() et ENT() du tableur, écrire une fonction renvoyant	Simuler au tableur 100, puis 1000, puis 5000 lancers

	<p>inclus et 1 exclu.</p> <p>Fonction random() de la bibliothèque random du logiciel Python retournant un nombre aléatoire compris entre 0 inclus et 1 exclu.</p> <p>Fonction randint(a,b) de la bibliothèque random du logiciel Python retournant un nombre entier aléatoire compris entre les entiers a inclus et b inclus.</p>	<p>de manière aléatoire un nombre entier compris entre deux entiers a et b.</p> <p>Simuler au tableur ou en Python le lancer d'une pièce de monnaie.</p> <p>Simuler au tableur ou en Python le lancer d'un dé à 6 faces.</p> <p>Simuler en Python une variable aléatoire.</p>	<p>successifs d'un dé à six faces bien équilibré.</p> <p>Dans chaque cas, représenter par un histogramme la distribution des fréquences d'apparition de chaque chiffre entre 1 et 6 et les comparer à la probabilité correspondante.</p> <p>Réaliser des activités similaires en Python.</p> <p>Simuler au tableur la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus lors du lancer de deux dés bien équilibrés à 6 faces.</p> <p>Simuler des échantillons de tailles 100, puis 1000, puis 5000 de cette variable aléatoire et représenter par un histogramme la distribution des fréquences.</p> <p>Réaliser des activités similaires en Python.</p>

UA Raisonnement, logique

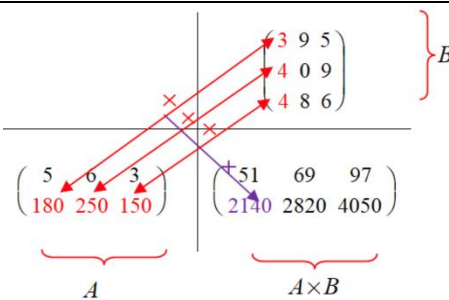
Il n'est pas attendu que les enseignants présentent les notions de cette unité d'apprentissage dans un cours qui leur serait spécifiquement dédié. Au contraire, c'est à l'occasion de la rencontre de ces notions dans les autres unités d'apprentissage (géométrie, probabilités, calcul algébrique, arithmétique, algorithmique et programmation) que le professeur les formalisera. Cette unité vise simplement à synthétiser tout ce qui est attendu des élèves en fin de 4^{ème} année.

	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Consolider la connaissance du vocabulaire mathématique de base		
	Consolidation des notions d'ensemble, d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire. Symboles mathématiques correspondants : \in , \subset , \cap , \cup . Diagramme de Venn. Notation des ensembles de nombres et des intervalles de \mathbb{R} .	Écrire un ensemble en extension (s'il est fini) ou en compréhension. Déterminer l'intersection et la réunion de deux intervalles de \mathbb{R} .	Écrire en compréhension l'ensemble des nombres réels dont le carré est strictement inférieur strictement à 1. Écrire en compréhension l'ensemble des nombres réels x tels que $\sin x = 0$.
	Indications didactiques ou pédagogiques, remarques. Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A d'un ensemble E on utilise à la fois la notation des probabilités \bar{A} , et la notation $E \setminus A$.		
BLOC 2	Consolider la lecture et l'écriture de propositions mathématiques		
	Proposition mathématique : utilisation des quantificateurs universel (symbole \forall) et existentiel (symboles \exists ; $\exists!$).	Traduire en langage mathématique une proposition énoncée en langage naturel et comportant un ou plusieurs quantificateurs.	Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

	<p>Réciproque d'une implication.</p> <p>Conditions nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante ; lien avec les symboles</p> <p>$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$.</p>	<p>Énoncer dans le langage naturel une proposition mathématique comportant un ou plusieurs quantificateurs.</p> <p>Formuler (en langage naturel et en langage mathématique) la réciproque d'une implication.</p> <p>Formuler une équivalence logique.</p> <p>Identifier la condition nécessaire et la condition suffisante d'une implication :</p> <p>$A \Rightarrow B$: B est une condition nécessaire de A</p> <p>$B \Rightarrow A$: B est une condition suffisante de A</p> <p>$A \Leftrightarrow B$: A est une condition nécessaire et suffisante de B.</p>	<p>$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} ; y \geq x$</p> <p>$\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} ; y \geq x$</p> <p>$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} ; x \leq y^2$</p> <p>$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} ; x \leq y^2$</p> <p>Écrire la négation de chacune des propositions précédentes.</p> <p>Relier les propositions suivantes par une implication ou une équivalence :</p> <p>Proposition A : n est un multiple de 3 ;</p> <p>Proposition B : n est un multiple de 2 ;</p> <p>Proposition C : n est un multiple de 6 ;</p> <p>Proposition D : n est un multiple de 2 et de 3.</p> <p>On aura intérêt à faire réfléchir régulièrement les élèves sur des questions simples, du type : quelle est la négation de la</p>
--	--	---	---

			<p>propriété $x \leq 0$?</p> <p>Quelle est la négation de la propriété</p> <p>$x \in [0,1[$?</p>
BLOC 3	Consolider la formalisation des raisonnements mathématiques déjà étudiés		
	<p>Raisonnement par disjonction de cas.</p> <p>Raisonnement par l'absurde.</p> <p>Raisonnement par récurrence.</p>	<p>Dans le cadre de la résolution de problèmes, mobiliser des raisonnements et les rédiger sous la forme de démonstrations.</p>	<p>Sachant que π n'est pas un nombre rationnel, démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que le nombre $\frac{2\pi+3}{\pi+1}$ n'est pas un nombre rationnel.</p> <p>Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la somme des n premiers entiers impairs est égal à n^2.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Les élèves sont entraînés à reconnaître des analogies et des particularités entre un problème à résoudre et une situation déjà connue.</p> <p>En géométrie, les élèves doivent comprendre que, si l'observation d'une figure est un support au raisonnement, elle ne peut en aucune manière s'y substituer.</p> <p>Dans une démarche inductive, à la suite d'essais sur des cas particuliers, les élèves sont amenés à émettre des conjectures qu'ils devront ensuite prouver à l'aide d'une démonstration ou infirmer en produisant un contre-exemple.</p>			

UA Matrices et graphes			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Matrices		
	<p>Matrice à n lignes et m colonnes à coefficients réels.</p> <p>Matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée.</p> <p>Notations :</p> <ul style="list-style-type: none"> • a_{ij} pour le terme de la ligne i et la colonne j • matrice $n \times m$ pour une matrice à n lignes et m colonnes. 	<p>Identifier les lignes et les colonnes d'une matrice.</p>	
	<p>Opérations : somme de matrices de même dimension, produit d'une matrice par un nombre réel.</p> <p>Produit d'une matrice A à m lignes et n colonnes par une matrice B à n lignes et p colonnes.</p> <p>Notations $A \times B$ ou AB.</p>	<p>Reconnaître que la matrice produit est une matrice (n,p).</p> <p>Utiliser la disposition</p>	<p>Exemple d'exercice possible :</p> <p>Trois magasins M1, M2, M3 proposent à la vente cinq produits p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 dont les prix unitaires sont donnés par le tableau suivant :</p>



Prix unitaire (en \$)	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
M1	1	5	2	3	4
M2	1,1	4,7	1,8	3,1	3,8
M3	0,9	5,1	1,9	3,2	4

Un client veut acheter deux produits p_1 , un produit p_2 , trois produits p_3 , trois produits p_4 , et deux produits p_5 .

Effectuer le produit d'une matrice (dite matrice de prix) 5×3 par une matrice colonne (dite matrice des quantités) pour déterminer le prix du panier total de l'acheteur dans chacun des trois magasins et déterminer le magasin dans lequel il a intérêt à effectuer ses achats.

Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.

On fera observer que le produit d'une matrice $p \times n$ et d'une matrice $n \times m$ est une matrice $p \times m$: pour que la multiplication soit possible, il faut que le même entier n soit la dimension à droite de la matrice de gauche, et la dimension à gauche de la matrice de droite. Une fois le produit effectué, l'entier n n'apparaît plus.

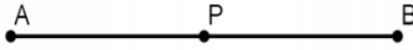
BLOC 2	Puissances d'une matrice carrée		
	Puissances A^n (n entier naturel) d'une matrice carrée A .	Calculer des puissances positives d'une matrice donnée.	Utiliser une récurrence pour calculer la puissance n -ième d'une matrice.
	<p>Évolution couplée de deux suites récurrentes. Modélisation par une relation de récurrence $X_{n+1} = M X_n$, où M est une matrice 2×2 et X_n et X_{n+1} sont deux matrices 2×1.</p> <p>Égalité $X_n = M^n X_0$ où X_0 représente l'état initial du système.</p>	<p>Pour des valeurs numériques de n, calculer l'état du système au bout de n étapes en fonction de son état initial à l'aide de la relation</p> $X_n = M^n X_0$	<p>Étude du comportement asymptotique du système donné dans la colonne de gauche en étudiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$.</p> <p>Exemple d'exercice possible :</p> <p>Dans le cadre d'une étude scientifique, des souris sont enfermées dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces deux compartiments est ouverte pendant un quart d'heure tous les jours jour à midi.</p> <p>On suppose qu'au départ les deux compartiments contenaient le même effectif de souris.</p> <p>Les observations ont montré que, chaque jour : 20% des souris présentes dans le</p>

			<p>compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après la fermeture de la porte.</p> <p>10% des souris présentes dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après la fermeture de la porte.</p> <p>On note a_n (resp b_n) la proportion de souris présentes dans le compartiment A (resp B) au bout de n jours.</p> <p>On note X_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.</p> <p>Déterminer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n et la matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$.</p> <p>Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de trois jours.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Les élèves ayant étudié en S3 le produit de deux matrices 2×2, on commence par présenter le produit de deux matrices 3×3. L'objectif n'est pas de définir les règles du calcul matriciel dans un cadre abstrait, mais de l'utiliser dans des cas concrets, sur des valeurs numériques de m et n. Lors de la résolution de problèmes, l'utilisation d'une calculatrice</p>			

	permet de limiter le temps consacré à des calculs techniques (notamment des produits et des puissances de matrices) et de se concentrer sur les aspects liés à la modélisation et au raisonnement.	
BLOC 2	Matrice d'adjacence d'un graphe	
	Matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre p , orienté ou non orienté.	Écrire la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non).
	La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.	Construire un graphe dont la matrice d'adjacence est donnée.
	<p><i>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</i></p> <p>Après avoir présenté en S3 les matrices comme outils de représentation des systèmes linaires, l'objectif est ici de montrer qu'elles servent aussi à représenter des graphes.</p>	
BLOC 4	Chaines de Markov à 2 ou 3 états	
	Chaine de Markov homogène.	Reconnaître une chaine de Markov homogène.
	Matrice de transition d'une chaine de Markov homogène.	
	Graphe orienté et pondéré d'une chaine de Markov.	Déterminer la matrice de transition d'une chaine de Markov.
		Vérifier sur des exemples que la matrice de transition d'une chaine de Markov est une matrice stochastique.
		Associer un graphe orienté et pondéré à une chaine de Markov à 2 ou 3 états.

	<p>Distributions de probabilité d'une chaîne de Markov.</p> <p>La matrice ligne π_n donnant la distribution à l'étape n d'une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n Q$.</p> <p>Égalité $\pi_n = \pi_0 Q^n$, où π_0 est la matrice ligne représentant la distribution initiale.</p>	<p>Pour des valeurs numériques de n, calculer la distribution de probabilité π_n à l'étape n en fonction de la matrice de transition Q et de la distribution initiale π_0.</p>	<p>Exemples d'exercices possibles :</p> <p>Graphe d'ordre 2</p> <p>Deux grossistes A et B se partagent la clientèle d'un produit industriel. On suppose que le nombre total de clients reste fixe d'une année sur l'autre. En 2022, 45% des clients se fournissaient chez le grossiste A et 55% chez le grossiste B. On admet que, d'une année sur l'autre, 6% des clients du grossiste A deviennent clients du grossiste B tandis que le grossiste B conserve 86% de ses clients. Chaque année, on choisit au hasard un client ayant acheté le liquide. Pour tout entier naturel n on note :</p> <ul style="list-style-type: none"> • a_n la probabilité qu'il soit client du grossiste A en 2022 + n, • b_n la probabilité qu'il soit client du grossiste B en 2022 + n. • $P_n = (a_n, b_n)$ la matrice ligne représentant la
--	--	---	--

			<p>distribution de probabilité à l'année 2022 + n.</p> <p>Représenter la situation par un graphe et calculer sa matrice de transition.</p> <p>À quelle répartition des clients doit-on s'attendre en 2030 ?</p> <hr/> <p>Graphe d'ordre 3 :</p> <p>On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires. On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.</p> <p>Ce processus peut être vu comme une marche aléatoire sur un espace à trois états :</p> <p>A : il y a 0 boule blanche dans U ;</p> <p>B : il y a 1 boule blanche dans U ;</p> <p>C : il y a 2 boules blanches dans U.</p>
--	--	--	---

			<p>4. Représenter la situation à l'aide d'un graphe orienté et pondéré et déterminer sa matrice de transition.</p> <p>5. Pour tout entier naturel n, on note π_n la distribution du système après n transitions.</p> <p>6. On admet que la suite (π_n) converge vers une matrice ligne π. Déterminer π et l'interpréter.</p> <p>Marche aléatoire sur un segment : Un personnage se déplace d'un sommet à l'autre du graphe ci-dessous selon la loi suivante :</p>  <p>S'il est en A ou en B, il ne peut aller qu'en P ; s'il est en P, il peut aller en A ou en B avec la même probabilité $\frac{1}{2}$. Représenter la situation par un graphe et donner la matrice de transition G de ce graphe. Calculer G^2 et G^3.</p>
--	--	--	--

	<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>L'étude des chaînes de Markov utilise les probabilités conditionnelles vues en S3 et la formule des probabilités totales. Il convient donc de commencer l'étude par un rappel sur ces notions. On se limite aux chaînes de Markov à deux ou trois états.</p>
--	--

Année 4 : série « Sciences de la vie et de la Terre »

UA Fonctions			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Limites de suites		
	Limite (finie ou infinie) d'une suite réelle. Une suite croissante est soit majorée, et alors elle tend vers une limite finie, soit non majorée et elle tend vers ∞ (résultat admis).		Pour une suite ayant comme limite $+\infty$, et un nombre réel A , déterminer un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N, u_n \geq A$.
	Limites et comparaison : - le théorème des gendarmes ; - une suite minorée par une suite tendant vers $+\infty$ tend elle-même vers $+\infty$; - une suite majorée par une suite tendant vers $-\infty$ tend elle-même vers $-\infty$;	Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.	
	Opérations sur les limites : limite d'une		

	somme, d'un produit, d'un quotient.		
	Convergence d'une suite géométrique.	Déterminer, selon les valeurs du nombre réel q , la limite de q^n lorsque $n \rightarrow +\infty$, après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli : pour tout réel a positif et tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$	
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>En S3, les suites étaient étudiées dans l'Unité <i>Nombres et calculs</i>. Sans attacher une importance excessive au basculement vers l'unité d'apprentissage <i>Fonctions</i>, celui-ci provient du fait qu'on s'attache maintenant aux propriétés de convergence des suites, qui relèvent de l'analyse, alors que, dans l'unité d'apprentissage <i>Nombres et calculs</i>, l'accent était mis sur les propriétés algébriques. La notion de limite est présentée de manière intuitive, en s'appuyant sur la vision géométrique. Les objectifs sont d'installer une solide pratique des aspects opératoires, d'étudier la convergence de certaines suites (comme les suites géométrique). Dans l'unité d'apprentissage matrices et graphes, des suites à valeurs dans \mathbb{R}^2 seront étudiées.</p>			
BLOC 2	Limites et continuité des fonctions		
	<p>Limite finie ou infinie d'une fonction en un point.</p> <p>Notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.</p> <p>Interprétation graphique. Asymptote verticale.</p> <p>Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, quotient.</p>	<p>Utiliser la courbe représentative d'une fonction pour visualiser son comportement au voisinage d'un point et déterminer intuitivement la valeur de la limite en ce point.</p> <p>Déterminer de manière intuitive les limites en un point des fonctions de référence, notamment les limites à droite et à gauche en 0 de la fonction inverse.</p>	

<p>Limite (finie ou infinie) d'une fonction quand $x \rightarrow \pm\infty$.</p> <p>Interprétation graphique.</p> <p>Asymptote horizontale.</p> <p>Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, quotient.</p>	<p>Utiliser la courbe représentative d'une fonction pour visualiser le comportement de la fonction au voisinage de $\pm\infty$ et déterminer de manière intuitive la valeur de la limite.</p> <p>Déterminer de manière intuitive les limites en $\pm\infty$ des fonctions de référence.</p> <p>Calculer la limite d'une fonction simple quand x tend vers $\pm\infty$ en appliquant les résultats sur les opérations.</p> <p>Types d'exemples de fonctions simples :</p> $x \mapsto \frac{1}{x}; x \mapsto 1 - \frac{1}{x};$	<p>Analogie avec la limite d'une suite.</p>
<p>Fonction continue sur un intervalle.</p> <p>Toute fonction dérivable est continue (résultat admis).</p>	<p>Visualiser sur un graphique la continuité sur un intervalle.</p>	<p>Exemples de fonctions non continues (fonction caractéristique d'un segment).</p>
<p>Image d'une suite convergente par une fonction continue.</p>		<p>Étude de suites simples données par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, pour une fonction f continue d'un intervalle dans lui-même.</p>
<p>Théorème des valeurs intermédiaires</p>	<p>Étudier les solutions d'une équation du</p>	<p>Écrire des algorithmes de</p>

	(admis). Cas d'une fonction strictement monotone : théorème de la bijection	type $f(x) = k$: existence, unicité.	recherche de racines d'équations dont on connaît l'existence (dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton). Coder ces algorithmes en Python.
Indications didactiques ou pédagogiques, remarques. La justification de la continuité d'une fonction sur un intervalle n'est pas un attendu du programme. En s'appuyant sur les représentations graphiques, l'enseignant met en évidence l'importance de la continuité dans le théorème des valeurs intermédiaires.			
BLOC 3	Compléments sur la dérivation		
	Composée de deux fonctions. Dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.	Calculer la dérivabilité d'une fonction mettant en jeu la composition.	
	Dérivées des fonctions cosinus, sinus et logarithme népérien.	En admettant la dérivabilité de la fonction logarithme, calculer sa dérivée.	
	Étude complète d'une fonction : domaine de définition, tableau de variations, limites.	Étudier une fonction et représenter à main levée sa courbe représentative.	
Indications didactiques ou pédagogiques, remarques. On pourra interpréter la formule de la dérivée d'une fonction composée à l'aide des relations de Leibniz : On pose $y = u(x)$ et $z = v(y)$. Alors $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$. On relie ensuite $\frac{dz}{dx}$ à $(v \circ u)'(x)$ et $\frac{dz}{dy}$ à $v'(y) = v'(u(x))$.			

BLOC 4	Primitives		
	Définition d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.	Interpréter la recherche d'une primitive comme l'opération inverse de la dérivation.	
	Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbb{Z}$; $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$. Primitives d'une somme.	Calculer des primitives de fonction se ramenant aux fonctions de référence par somme ou par composition, notamment celles d'une fonction de la forme $(v' \circ u) \times u'$.	
	<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>La motivation principale pour s'intéresser aux primitives est le calcul intégral, qui sera étudié immédiatement après ce chapitre. Il est intéressant de mentionner que, pour certaines fonctions, on ne dispose pas de primitive explicite.</p>		
BLOC 5	Calcul intégral		
	Définition de l'intégrale, sur un segment $[a, b]$, d'une fonction f continue et positive comme l'aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x) dx$.	Estimer graphiquement une intégrale. Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.	Mettre en regard les écritures $\int_a^b f(x) dx$ et $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$.

<p>Si f est continue sur $[a, b]$, alors la fonction $F_a: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.</p> <p>Égalité $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, si F est une primitive de f, ou, autrement dit :</p> <p>$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$, si F est dérivable à dérivée continue.</p>	<p>Calculer l'aire entre deux courbes.</p>	
<p>Propriétés de l'intégrale :</p> <ul style="list-style-type: none"> • linéarité, positivité, relation de Chasles ; • lien avec les inégalités. <p>Encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles.</p> <p>Valeur moyenne d'une fonction sur un segment.</p>	<p>Encadrer $\int_a^b f(x) dx$ à partir d'un encadrement de f.</p> <p>Calculer la valeur moyenne d'une fonction périodique sur une période et interpréter graphiquement le résultat.</p> <p>Interpréter une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.</p>	<p>Algorithmes de calcul approché d'intégrales :</p> <ul style="list-style-type: none"> - méthode des rectangles ; - approche probabiliste : méthode de Monte Carlo. <p>Coder ces algorithmes en Python.</p>
<p>Formule d'intégration par parties.</p>	<p>Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.</p>	
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>1° Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale comme l'aire sous la courbe, ce qui permet d'approcher l'intégrale par la méthode des rectangles. La notation $\int_a^b f(x) dx$ permet d'interpréter l'intégrale comme une somme d'aires de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur dx.</p> <p>2° Ils apprennent à maîtriser le calcul approché (à partir de la méthode des rectangles) et le calcul exact à partir d'une</p>		

	primitive. La formule d'intégration par parties et les changements de variables ne figurent pas dans ce programme.		
BLOC 6	Équations différentielles $y' = ay$ ($a \neq 0$)		
	Résolution en montrant que la fonction $x \mapsto y(x) \times e^{-ax}$ est constante.	Résoudre des équations du type $y' = ay$. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions (courbes intégrales).	Traiter des situations dans lesquelles la variation instantanée d'une grandeur est proportionnelle à sa valeur courante : désintégration radioactive, doublement de population, etc. Méthode d'Euler pour tracer de manière approchée la courbe de l'unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$. Écrire l'algorithme et le coder en Python.
	Indications didactiques ou pédagogiques, remarques. Le lien est fait avec la définition de la fonction exponentielle.		
UA Géométrie			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Produit scalaire dans l'espace		
	Définition du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace à partir de sa définition dans un plan les contenant.	Exprimer le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace.	Utiliser le produit scalaire pour résoudre des problèmes impliquant des mesures de grandeurs : longueur, angle, aire,

	Propriétés du produit scalaire : bilinearité, symétrie.		volume.
	Orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites, d'un plan et d'une droite.	Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle ou une longueur dans l'espace.	
	Vecteur normal à un plan. Étant donné un point A et un vecteur non nul \vec{n} , plan passant par A et normal à \vec{n} .	Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.	
	Projeté orthogonal d'un point sur une droite		
	Projeté orthogonal d'un point sur un plan.		
<i>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</i>			
L'objectif est d'étendre à l'espace le produit scalaire étudié dans le plan en S3.			
BLOC 2	Géométrie analytique dans l'espace		
	Bases et repères orthonormés de l'espace. Coordonnées d'un point dans un repère orthonormé.	Calculer, dans une base orthonormée, des produits scalaires, des normes, des distances.	Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : - orthogonalité de

	Expressions, dans une base orthonormée, du produit scalaire, de la norme, de la distance entre deux points.	Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.	deux droites, orthogonalité d'une droite et d'un plan ; - parallélisme d'une droite à un plan.
	Représentation paramétrique d'une droite. Représentation paramétrique d'un plan.	Donner la représentation d'une droite définie par un point et un vecteur directeur. Déterminer un point et un vecteur directeur d'une droite à partir d'une représentation paramétrique. Donner la représentation paramétrique d'un plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires. Déterminer un point et deux vecteurs non colinéaires dirigeant un plan donné par une représentation paramétrique.	
	Équation cartésienne d'un plan par la recherche d'un vecteur normal		Résoudre un système de deux équations linéaires à trois inconnues pour déterminer l'intersection de deux plans. Résoudre un système de deux équations linéaires à trois inconnues pour déterminer un vecteur normal à un plan donné par un point et deux vecteurs non colinéaires et en déduire une

			équation cartésienne de ce plan.
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Pour traiter analytiquement un problème géométrique, le choix d'un repère adapté mérite une attention particulière. Selon le problème à résoudre, on choisit une représentation paramétrique (d'un plan ou d'une droite) ou une (ou deux) équation cartésienne.</p>			
UA Probabilités			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Utiliser des sommes de variables aléatoires finies		
	<p>Somme de deux variables aléatoires.</p> <p>Espérance de la somme de deux variables aléatoires (résultat admis). Si les variables X et Y sont indépendantes, et si V désigne la variance, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ (résultat admis).</p>	<p>Calculer l'espérance de la somme de deux ou plusieurs variables aléatoires.</p>	
	<p>Expression d'une variable aléatoire de loi binomiale $B(n, p)$ comme somme de n variables de Bernoulli indépendantes</p>	<p>Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi binomiale.</p>	<p>Utiliser un tableur ou un logiciel de programmation pour représenter par un diagramme en bâtons la loi de probabilité d'une loi binomiale $B(n, p)$.</p>

	de paramètre p . Espérance et variance d'une loi binomiale.		Faire le lien avec l'histogramme des fréquences observées de 1 lors de la simulation de N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p .
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>L'objectif est ici d'aborder la loi binomiale sous un autre angle que celui selon lequel elle a été introduite en S3. Son expression comme somme de variables de Bernoulli indépendantes permet d'en calculer facilement l'espérance et la variance. Cela permet également de la simuler informatiquement à partir d'un simple générateur de nombres aléatoires égaux à 0 ou 1 (en sommant le nombre de 1 obtenus).</p>			
BLOC 2	Comprendre le principe de l'échantillonnage et le lien entre fréquence et probabilité		
	Échantillon de taille n d'une variable aléatoire X , défini comme une liste $[X_1, X_2, \dots, X_n]$ de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X .	Si $[X_1, X_2, \dots, X_n]$ est un échantillon d'une variable X , calculer l'espérance et la variance de la somme $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et de la moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$ en fonction de l'espérance et de la variance de X .	
	Version vulgarisée de la loi des grands nombres : « lorsque n est grand, sauf exceptions, la fréquence calculée sur un échantillon est proche de la probabilité ». Estimation d'une probabilité (ou d'une	Simuler (sur un tableur ou un logiciel de programmation) des échantillons d'une loi de Bernoulli de paramètre p en faisant augmenter leur taille n et observer la	Lors d'une élection entre deux candidats, estimer la chance d'élection d'un des candidats à partir d'un sondage et expliquer les limites de ce sondage. Lors d'un contrôle qualité réalisé

<p>proportion) à l'aide d'une fréquence calculée sur un échantillon.</p>	<p>stabilisation des fréquences autour de p.</p> <p>Pour une valeur de n supérieure à 50, et une valeur de p comprise entre 0,2 et 0,8, simuler, avec un tableur ou un logiciel de programmation, N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p et représenter les fréquences de succès observés par un nuage de points. Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la fréquence observée et p est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et la comparer à 0,95.</p>	<p>dans une entreprise industrielle, estimer la proportion d'objets défectueux fabriqués par l'entreprise à partir de la fréquence observée sur un échantillon et expliquer les limites de ce contrôle.</p> <p>Lors d'une campagne de dépistage d'une maladie, estimer la proportion de personnes malades dans la population totale à partir du nombre de malades observés sur un échantillon et expliquer les limites de ce dépistage.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Une réalisation $[X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)]$ d'un échantillon de la variable aléatoire X est la suite des valeurs prises X sur une sous-population de taille n prélevée au hasard dans la population totale Ω. Cela permet de relier un échantillon d'une loi de probabilité avec un échantillon statistique.</p> <p>La simulation de N échantillons de taille n de d'une loi de Bernoulli paramètre p permet aux élèves de :</p> <ul style="list-style-type: none"> - percevoir la fluctuation des fréquences calculées sur les échantillons ; - percevoir la stabilisation de ces fréquences autour de p (pour de grandes valeurs de n) et comprendre ainsi pourquoi la fréquence f de succès calculée sur un échantillon est une estimation la probabilité p ; 		

<ul style="list-style-type: none"> - quantifier la qualité de cette estimation en calculant la proportion des échantillons où l'écart entre f et p est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Si f est une fréquence calculée sur un échantillon, l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ s'appelle un intervalle de confiance à 95 % ; - comprendre que les 5% des fréquences non situées dans l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ expliquent les limites de l'estimation. -

--

UA Statistique

	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
--	----------------	---------------------	--------------------------------

BLOC 1	Séries statistiques à deux variables quantitatives		
	Nuage de points associé à une série statistique à deux variables quantitatives.	Représenter un nuage de points à partir de la donnée de deux variables quantitatives.	
	Ajustement affine d'un nuage de points. Coefficient de corrélation linéaire entre deux variables quantitatives.	Déterminer un ajustement affine au jugé, puis à l'aide de la droite des moindres carrés. Utiliser un outil numérique (calculatrice, tableur, logiciel de programmation) pour calculer le coefficient de corrélation linéaire entre deux variables.	Dans un premier temps, les ajustements affines peuvent être réalisés graphiquement « au jugé ». L'appréciation de leur qualité peut faire l'objet d'une discussion au sein de la classe. Dans un deuxième temps, la méthode de la <i>droite de Mayer</i> est présentée.

		<p>Interpréter le coefficient de corrélation linéaire.</p> <p>Utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues.</p>	<p>Dans un troisième temps, l'enseignant présente aux élèves la méthode des moindres carrés : recherche d'une droite d'équation $y = ax + b$ réalisant le minimum de $\sum_i (y_i - ax_i)^2$ pour le nuage de points $(x_i ; y_i)$. Il donne l'interprétation géométrique de ce minimum.</p> <p>Les élèves effectuent les calculs des coefficients a et b à la calculatrice ou à l'aide d'un tableur.</p> <p>Avec les différentes méthodes, l'enseignant montre comment effectuer des prédictions de valeurs. Il privilégie les contextes réels, en lien avec la filière :</p> <ul style="list-style-type: none"> - données issues des domaines de la santé ; - mesures expérimentales de grandeurs liées par une relation linéaire en biologie (intensité et tension ; droite d'étalonnage d'une concentration).
--	--	--	--

L'enseignant veille à entraîner les élèves à exercer leur esprit critique sur la pertinence, au regard des données et de la situation étudiée, d'une modélisation par un ajustement affine et sur les limites des extrapolations faites dans ce cadre.

Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.

Les élèves sont sensibilisés à bien différencier causalité et corrélation. Ceci est une compétence mathématique, bien sûr, mais aussi une compétence citoyenne.

UA Algorithmique et programmation

Savoirs

Savoir-faire

Suggestions d'activités

BLOC 1 Utiliser des variables, des fonctions, des boucles, des tests et des listes

Consolidation des savoirs acquis au cours des années précédentes sur les variables, les fonctions, les boucles, les tests et les listes.

Consolidation des savoir-faire développés au cours des années précédentes sur les variables, les fonctions, les boucles, les tests et les listes.

Écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel non nul et qui renvoie la liste des bits de son écriture en base 2.

Écrire une fonction qui prend en argument une liste de 0 et de 1 et qui renvoie le nombre entier écrit en base dix dont cette liste est l'écriture en base 2.

			Écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel non nul et qui renvoie la liste de ses facteurs premiers.
Indications didactiques ou pédagogiques, remarques			
BLOC 2	Utiliser un tableur ou un langage de programmation textuel pour simuler une expérience aléatoire ou une variable aléatoire		
	<p>Fonction ALEA() du tableur retournant un nombre aléatoire compris entre 0 inclus et 1 exclu.</p> <p>Fonction random() de la bibliothèque random du logiciel Python retournant un nombre aléatoire compris entre 0 inclus et 1 exclu.</p> <p>Fonction randint(a,b) de la bibliothèque random du logiciel Python retournant un nombre entier aléatoire compris entre les entiers a inclus et b inclus.</p>	<p>À l'aide des fonctions ALEA() et ENT() du tableur, écrire une fonction renvoyant de manière aléatoire un nombre entier compris entre deux entiers a et b.</p> <p>Simuler au tableur ou en Python le lancer d'une pièce de monnaie.</p> <p>Simuler au tableur ou en Python le lancer d'un dé à 6 faces.</p> <p>Simuler en Python une variable aléatoire.</p>	<p>Simuler au tableur 100, puis 1000, puis 5000 lancers successifs d'un dé à six faces bien équilibré.</p> <p>Dans chaque cas, représenter par un histogramme la distribution des fréquences d'apparition de chaque chiffre entre 1 et 6 et les comparer à la probabilité correspondante.</p> <p>Réaliser des activités similaires en Python.</p> <p>Simuler au tableur la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus lors du lancer de deux dés bien équilibrés à 6 faces.</p> <p>Simuler des échantillons de tailles 100, puis 1000, puis 5000 de cette variable aléatoire et représenter par un histogramme la distribution des fréquences.</p> <p>Réaliser des activités similaires en Python.</p>

UA Raisonnement, logique			
<p>Il n'est pas attendu que les enseignants présentent les notions de cette unité d'apprentissage dans un cours qui leur serait spécifiquement dédié. Au contraire, c'est à l'occasion de la rencontre de ces notions dans les autres unités d'apprentissage (géométrie, probabilités, calcul algébrique, arithmétique, algorithmique et programmation) que le professeur les formalisera. Cette unité vise simplement à synthétiser tout ce qui est attendu des élèves en fin de 4^{ème} année.</p>			
	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Consolider la connaissance du vocabulaire mathématique de base		
	<p>Consolidation des notions d'ensemble, d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire. Symboles mathématiques correspondants : \in, \subset, \cap, \cup. Diagramme de Venn. Notation des ensembles de nombres et des intervalles de \mathbb{R}.</p>	<p>Écrire un ensemble en extension (s'il est fini) ou en compréhension. Déterminer l'intersection et la réunion de deux intervalles de \mathbb{R}.</p>	<p>Écrire en compréhension l'ensemble des nombres réels dont le carré est strictement inférieur à 1. Écrire en compréhension l'ensemble des nombres réels x tels que $\sin x = 0$.</p>
	<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques. Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A d'un ensemble E, on utilise à la fois la notation des probabilités A^c, et la notation $E \setminus A$. La détermination de l'intersection et de la réunion de deux intervalles de \mathbb{R} est traitée dans différentes configurations (intervalles ayant une intersection non vide, intervalles adjacents, intervalles disjoints).</p>		
BLOC 2	Consolider la lecture et l'écriture de propositions mathématiques		
	<p>Proposition mathématique : utilisation des quantificateurs universel (symbole \forall)</p>	<p>Formuler (en langage naturel et en langage mathématique) la négation d'une proposition contenant un ou plusieurs</p>	<p>Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :</p>

	<p>et existentiel (symboles \exists ; $\exists!$).</p> <p>Conditions nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante.</p>	<p>quantificateurs.</p> <p>Formuler (en langage naturel et en langage mathématique) la réciproque d'une implication.</p> <p>Formuler une équivalence logique</p> <p>Identifier la condition nécessaire et la condition suffisante d'une implication.</p>	<p>$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} ; y \geq x$</p> <p>$\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} ; y \geq x$</p> <p>$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} ; x \leq y^2$</p> <p>$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} ; x \leq y^2$</p> <p>Écrire la négation de chacune des propositions précédentes.</p> <p>Relier les propositions suivantes par une implication ou une équivalence :</p> <p>Proposition A : n est un multiple de 3 ;</p> <p>Proposition B : n est un multiple de 2 ;</p> <p>Proposition C : n est un multiple de 6 ;</p> <p>Proposition D : n est un multiple de 2 et de 3.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>On aura intérêt à faire réfléchir régulièrement les élèves sur des questions simples, du type : quelle est la négation de la propriété $x \leq 0$? Quelle est la négation de la propriété $x \in [0,1[$?</p>			

BLOC 3	Consolider la formalisation des raisonnements mathématiques déjà étudiés	
	<p>Raisonnement par disjonction de cas.</p> <p>Raisonnement par l'absurde.</p> <p>Raisonnement par récurrence.</p>	<p>Dans le cadre de la résolution de problèmes, mobiliser des raisonnements et les rédiger sous la forme de démonstrations.</p> <p>Soit f une fonction monotone sur \mathbb{R}.</p> <p>On note $f \circ f$ la fonction qui à tout x associe $f(f(x))$.</p> <p>Démontrer par disjonction de cas que $f \circ f$ est croissante sur \mathbb{R}.</p> <p>Sachant que π n'est pas un nombre rationnel, démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que le nombre $\frac{2\pi+3}{\pi+1}$ n'est pas un nombre rationnel.</p> <p>Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la somme des n premiers entiers impairs est égal à n^2.</p> <p>Utiliser un raisonnement par récurrence pour étudier des suites définies par leur premier terme et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$</p> <p>lorsque f est une fonction croissante.</p>

Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.
 Les élèves sont entraînés à reconnaître des analogies et des particularités entre un problème à résoudre et une situation déjà connue.
 En géométrie, les élèves doivent comprendre que, si l'observation d'une figure est un support au raisonnement, elle ne peut en aucune manière s'y substituer.
 Dans une démarche inductive, à la suite d'essais sur des cas particuliers, les élèves sont amenés à émettre des conjectures qu'ils devront ensuite prouver à l'aide d'une démonstration ou infirmer en produisant un contre-exemple. De manière générale, les élèves doivent apprendre à utiliser des contre-exemples pour démontrer qu'une proposition est fausse et à chercher des exemples pour conjecturer une proposition.

UA Matrices et graphes

	Savoirs	Savoir-faire	Suggestions d'activités
BLOC 1	Matrices		
	Matrice à n lignes et m colonnes à coefficients réels. Matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée. Notations : <ul style="list-style-type: none"> • a_{ij} pour le terme de la ligne i et la colonne j • matrice $n \times m$ pour une matrice à n lignes et m colonnes. 	Identifier les lignes et les colonnes d'une matrice.	
	Opérations : somme de matrices	Reconnaître que la matrice produit	Exemple d'exercice possible :

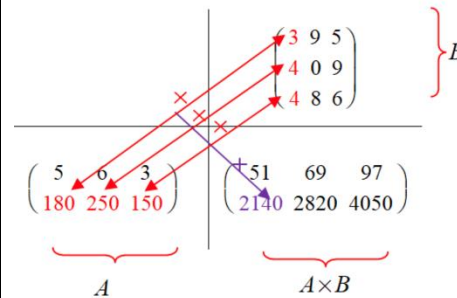
de même dimension, produit d'une matrice par un nombre réel.

Produit d'une matrice A à m lignes et n colonnes par une matrice B à n lignes et p colonnes.

Notations $A \times B$ ou AB .

est une matrice (n, p) .

Utiliser la disposition



Trois magasins M1, M2, M3 proposent à la vente cinq produits p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 dont les prix unitaires sont donnés par le tableau suivant :

Prix unitaire (en \$)	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
M1	1	5	2	3	4
M2	1,1	4,7	1,8	3,1	3,8
M3	0,9	5,1	1,9	3,2	4

Un client veut acheter deux produits p_1 , un produit p_2 , trois produits p_3 , trois produits p_4 , et deux produits p_5 .

Effectuer le produit d'une matrice (dite matrice de prix) 5×3 par une matrice colonne (dite matrice des quantités) pour déterminer le prix du panier total de l'acheteur dans chacun des trois magasins et déterminer le magasin dans lequel il a intérêt à effectuer ses achats.

Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.

On fera observer que le produit d'une matrice $p \times n$ et d'une matrice $n \times m$ est une matrice $p \times m$: pour que la multiplication soit possible, il faut que le même entier n soit la dimension à droite de la matrice de gauche, et la dimension à gauche de la matrice de droite. Une fois le produit effectué, l'entier n n'apparaît plus.

BLOC 2	Puissances d'une matrice carrée		
	Puissances A^n (n entier naturel) d'une matrice carrée A .	Calculer (à la main ou à l'aide d'une calculatrice) des puissances positives d'une matrice donnée (uniquement pour des valeurs numériques de n).	
	<p>Évolution couplée de deux suites récurrentes. Modélisation par une relation de récurrence $X_{n+1} = M X_n$, où M est une matrice 2×2 et X_n et X_{n+1} sont deux matrices 2×1.</p> <p>Égalité $X_n = M^n X_0$ où X_0 représente l'état initial du système.</p>	<p>Pour des valeurs numériques de n, calculer l'état du système au bout de n étapes en fonction de son état initial à l'aide de la relation</p> $X_n = M^n X_0.$	<p>Exemple d'exercice possible :</p> <p>Dans le cadre d'une étude scientifique, des souris sont enfermées dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces deux compartiments est ouverte pendant un quart d'heure tous les jours jour à midi.</p> <p>On suppose qu'au départ les deux compartiments contenaient le même effectif de souris.</p> <p>Les observations ont montré que, chaque jour :</p> <p>20% des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après la fermeture de la porte.</p> <p>10% des souris présentes dans le</p>

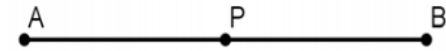
			<p>compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après la fermeture de la porte.</p> <p>On note a_n (resp b_n) la proportion de souris présentes dans le compartiment A (resp B) au bout de n jours.</p> <p>On note X_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.</p> <p>Déterminer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n et la matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$.</p> <p>Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de trois jours.</p>
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Les élèves ayant étudié en S3 le produit de deux matrices 2×2, on commence par présenter le produit de deux matrices 3×3. Lors de la résolution de problèmes, l'utilisation d'une calculatrice permet de limiter le temps consacré à des calculs techniques (notamment des produits ou des puissances de matrices) et de se concentrer sur les aspects liés à la modélisation et au raisonnement.</p>			

BLOC 2	Matrice d'adjacence d'un graphe		
	Matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre p , orienté ou non orienté.	Écrire la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non).	
	La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.	Construire un graphe dont la matrice d'adjacence est donnée.	
<p>Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.</p> <p>Après avoir présenté en S3 les matrices comme outils de représentation des transformations géométriques et des systèmes linéaires, l'objectif est ici de montrer qu'elles servent aussi à représenter des graphes.</p>			
BLOC 4	Chaines de Markov à 2 ou 3 états		
	<p>Chaîne de Markov homogène.</p> <p>Matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène.</p> <p>Graphe orienté et pondéré d'une chaîne de Markov.</p>	<p>Reconnaître une chaîne de Markov homogène.</p> <p>Déterminer la matrice de transition d'une chaîne de Markov.</p> <p>Vérifier sur des exemples que la matrice de transition d'une chaîne de Markov est une matrice stochastique.</p> <p>Associer un graphe orienté et pondéré à une chaîne de Markov à 2 ou 3 états.</p>	Donner des exemples de chaînes de Markov à 2 ou 3 états.
	<p>Distributions de probabilité d'une chaîne de Markov.</p> <p>La matrice ligne π_n donnant la distribution à l'étape n d'une chaîne de Markov homogène de matrice de</p>	<p>Pour une chaîne de Markov dont la matrice de transition Q est donnée, et pour des petites valeurs de n, calculer la distribution de probabilité π_n à l'étape n en fonction de Q et de la distribution initiale π_0.</p>	<p>Exemples d'exercices possibles :</p> <p>Graphe d'ordre 2 :</p> <p>Deux grossistes A et B se partagent la clientèle d'un produit industriel.</p>

	<p>transition Q vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n Q$.</p> <p>Égalité $\pi_n = \pi_0 Q^n$, où π_0 est la matrice ligne représentant la distribution initiale.</p>		<p>On suppose que le nombre total de clients reste fixe d'une année sur l'autre.</p> <p>En 2022, 45% des clients se fournissaient chez le grossiste A et 55% chez le grossiste B. On admet que, d'une année sur l'autre, 6% des clients du grossiste A deviennent clients du grossiste B tandis que le grossiste B conserve 86% de ses clients. Chaque année, on choisit au hasard un client ayant acheté le liquide.</p> <p>Pour tout entier naturel n on note :</p> <ul style="list-style-type: none"> • a_n la probabilité qu'il soit client du grossiste A en $2022 + n$, • b_n la probabilité qu'il soit client du grossiste B en $2022 + n$. <p>On note $\pi_n = (a_n, b_n)$ la matrice ligne représentant la distribution de probabilité en $2022 + n$.</p> <p>Représenter la situation par un graphe et calculer sa matrice de transition.</p> <p>À quelle répartition des clients doit-on s'attendre en 2030 ?</p>
--	---	--	---

			<p>Graphe d'ordre 3 :</p> <p>On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires. On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne. Ce processus peut être vu comme une marche aléatoire sur un espace à trois états :</p> <p>A : il y a 0 boule blanche dans U ; B : il y a 1 boule blanche dans U ; C : il y a 2 boules blanches dans U.</p> <p>7. Représenter la situation à l'aide d'un graphe orienté et pondéré et déterminer sa matrice de transition.</p> <p>8. Pour tout entier naturel n, on note π_n la distribution du système après n transitions.</p> <p>9. On admet que la suite (π_n) converge vers une matrice ligne π. Déterminer π et l'interpréter.</p> <p>Marche aléatoire sur un segment : Un personnage se déplace d'un</p>
--	--	--	---

sommet à l'autre du graphe ci-dessous selon la loi suivante :



S'il est en A ou en B, il ne peut aller qu'en P ; s'il est en P, il peut aller en A ou en B avec la même probabilité $\frac{1}{2}$. Représenter la

situation par un graphe et donner la matrice de transition G de ce graphe. Calculer G^2 et G^3

Indications didactiques ou pédagogiques, remarques.

L'étude des chaînes de Markov utilise les probabilités conditionnelles vues en S3 et la formule des probabilités totales. Il convient donc de commencer l'étude par un rappel sur ces notions. On se limite aux chaînes de Markov à deux ou trois états.